



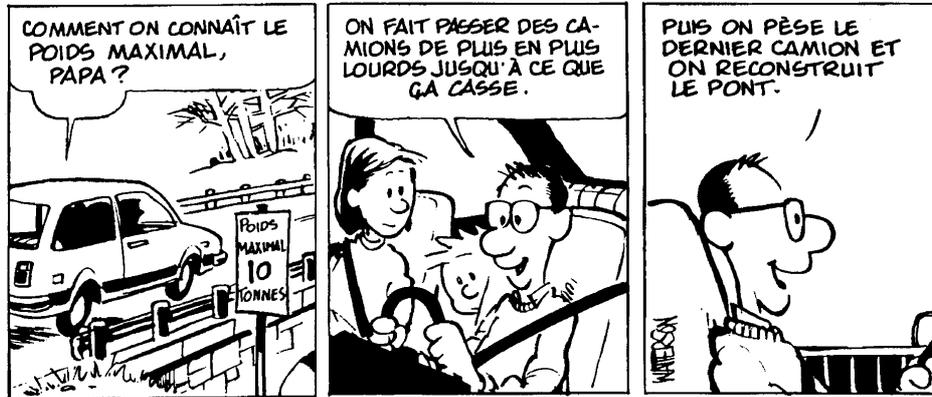
Résistance des matériaux
Mécanique des structures

Philippe Bouillard

Introduction (1)

- Résistance des matériaux ou
Mécanique des structures
- Objet de la mécanique des structures
 - concept de dimensionnement

le dimensionnement vu par le papa de Calvin ...



© Calvin and Hobbes

approche purement expérimentale ...

essai de chargement
avant mise en service

(80 camions
= 1300 tonnes !)

Pont de Normandie



Introduction (1)

- Résistance des matériaux ou
Mécanique des structures
- Objet de la mécanique des structures
 - concept de dimensionnement
- Les outils de la mécanique des structures
 - lois de la mécanique (*cf.* cours MMC)
 - caractérisation expérimentale des matériaux

Introduction (2)

- MAIS ...
 - hypothèses simplificatrices
 - *art* de l'ingénieur
- champ d'application très vaste
 - constructions (génie civil ou bâtiments)
 - mécanique (machines, moteurs, avions)
 - chimie (réservoirs, chaudières)
 - électricité (câbles, pylônes, centrales)
 - physique (physique du solide)
 - matériaux (physique des matériaux)
 -

bâtiments ...



J. von Spreckelsen, La Grande Arche de la Défense, Paris, 1982-89

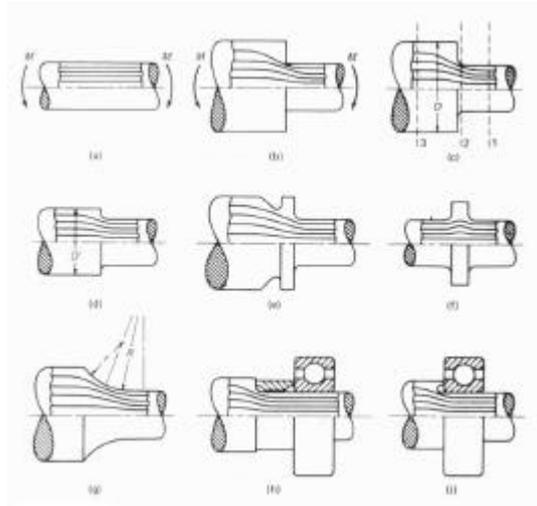
<http://www.bouygues.fr>

ouvrages d'art ...



Pont sur le Tage, Lisboa

constructions mécaniques ...



Flux de contrainte dans arbre mécanique

A. H. Burr, Mechanical analysis and Design

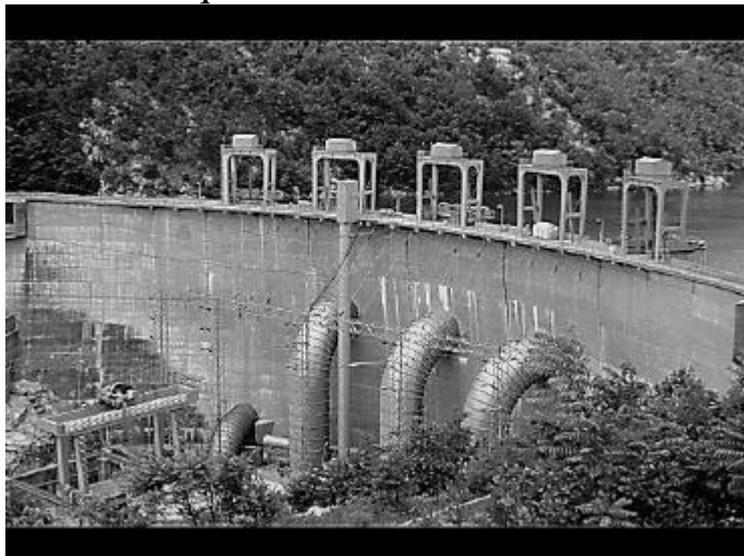
réservoirs ...



silos ...



centrale électrique ...



panneaux solaires ...



biomécanique ...



FIGURE 15.22 Photograph of bone structure presented in Wolff's paper of 1879 in Stechow's Archiv.

Y.C. Fung, Biomechanics, Springer-Verlag, New York, 1990

Introduction (3)

- Étude
 - de la *résistance*,
 - de la *rigidité*,
 - des *instabilités*.

la résistance ...



la rigidité ...



E. Beaudoin & M. Lods, Ecole en pleine air à Suresnes, 1932-35

P. Gössel & G. Leuthäuser, L'architecture au XX^{ème} siècle, Taschen, 1991

les instabilités ...



Casa Grande Ruins, Hohokam village, Arizona, USA, 12^{ème} siècle

Introduction (3)

- Étude
 - de la *résistance*,
 - de la *rigidité*,
 - des *instabilités*.
- Deux aspects
 - la *vérification*,
 - le *dimensionnement*.

Vérification des structures

- étant donné un pièce dont les dimensions sont fixées, quel est le degré de sécurité structurale ?
 - quelles sont les actions ?
 - quelles sont les caractéristiques matérielles ?

Dimensionnement des structures

- étant donné un degré de sécurité exigé, quelles sont les dimensions optimales à donner à une pièce ?
 - avant-projet
 - vérification
 - itération
- c'est une démarche de conception

Plan du cours (1)

- Introduction
 - rappels de mécanique des milieux continus
 - notion de sécurité structurale
 - actions sur les structures
 - appuis et liaisons
 - éléments structuraux
 - la poutre

Plan du cours (2)

- 1ère partie : analyse élastique
 - traction et compression
 - flexion simple
 - flexion cisailante
 - flexion gauche
 - flexion composée
 - introduction à la torsion
 - calcul des déplacements
 - introduction aux systèmes hyperstatiques

Plan du cours (3)

- 2ème partie : analyse limite
 - propriétés mécaniques des matériaux
 - traction plastique
 - flexion plane plastique
 - charge limite de structures hyperstatiques
- 3ème partie : instabilités
 - flambement de pièces longues
 - instabilités énergétiques

Références bibliographiques

- Ouvrage de référence principal
 - F. Frey, *Analyse des structures et milieux continus. Vol.2: mécanique des structures*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1994
- Système d'axes et convention de signe
 - C. Massonnet & S. Cescotto, *Mécanique des matériaux*, De Boeck Université, Bruxelles, 1992
- Autres ouvrages (exemples)
 - A. H. Burr, *Mechanical analysis and design*, Elsevier, Amsterdam, 1984
 - G. M. Seed, *Strength of materials*, Saxe-Coburg publications, Edinburgh, 2000

Renseignements pratiques

- *Localisation* : Service des Milieux Continus, Bât C, 87 Av. Buyl, 4ème étage
- *Serveur Web* : <http://www.ulb.ac.be/smc>
- *e-mail* : **philippe.bouillard@ulb.ac.be**
- Notes de cours
- Modalités d'examen

L'examen n'est pas



un jeu de hasard

ni un test de connaissances

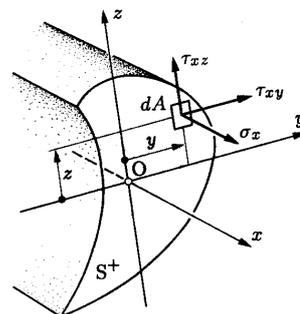
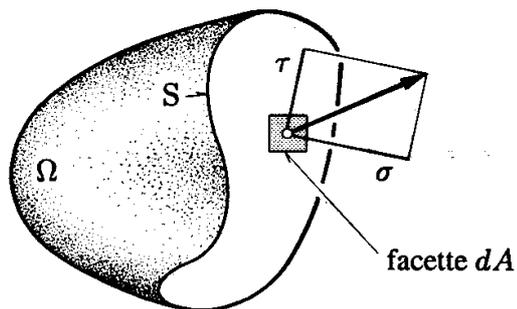
L'examen est l'occasion de démontrer vos compétences.

2 - Sécurité structurale

Rappels de mécanique des milieux continus

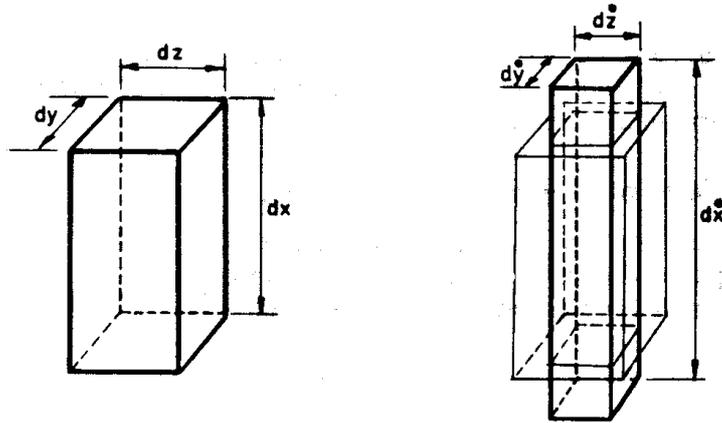
- Notion de contraintes
- Lois fondamentales et équations d'équilibre
- Notion de déformations
- Lois de comportement
- Problème général de l'élasticité
- Théorèmes des travaux virtuels

Notion de contraintes



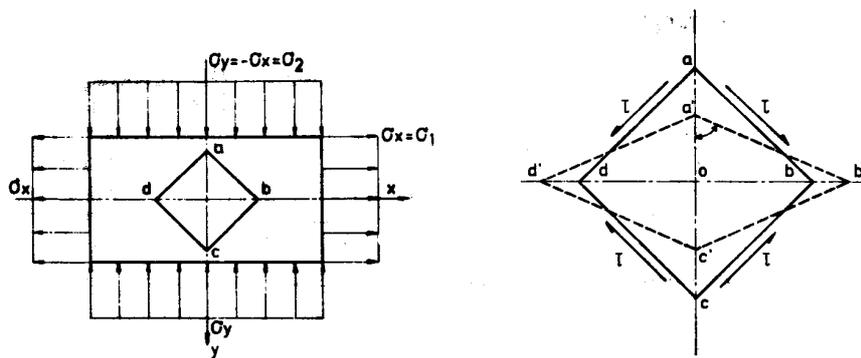
$$\vec{T}^{(n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{dF}^{(n)}}{\Delta A}$$

Notion de déformations



Allongement ϵ_x

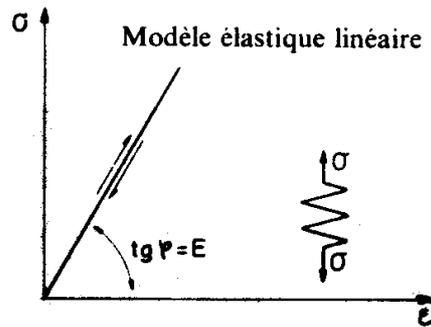
Notion de déformations



Déformation angulaire γ_{xy}

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Loi de Hooke



Loi de Hooke + effet de Poisson

Notion de sécurité structurale

- Définition
 - toute structure doit être conçue de manière à **résister**, avec une **marge** appropriée, à l'ensemble des **sollicitations** prévues durant les périodes de **montage** et d'**exploitation** \Rightarrow *durée de vie*
- Conception
 - conception, calculs, exécution et entretien doivent garantir une *sécurité* convenable des structures contre lors *mise hors service*.

Sécurité structurale : incertitudes (1)

- sollicitations en service << sollicitations de ruine
- coefficients de sécurité = réserve + *incertitudes*
 - actions : intensité, durée, statique-dynamique, point d'application, ...
 - dispersion des propriétés mécaniques : défauts, contraintes internes, ...
 - modification des propriétés mécaniques avec le temps : vieillissement, corrosion, ...

Sécurité structurale : incertitudes (2)

- modification des propriétés mécaniques avec le temps : vieillissement, corrosion, ...
- imprécisions sur les dimensions : tolérances de mise en œuvre, ...
- incertitudes sur la modélisation : hypothèses simplificatrices, calculs approchés, ...
- malfaçons diverses
- seule méthode valable ...
l'expérience grandeur réelle

Conception déterministe de la sécurité

- Coefficient de sécurité global
 - $S(\gamma Q_{\max} \text{ en service}) \Rightarrow$ ruine
 - définition non satisfaisante
- Méthode des contraintes admissibles
 - hypothèse de linéarisation (géométrique et matérielle)
$$\gamma \sigma_{\max} \text{ en service} = \sigma_{\text{ruine}}$$
 - le critère de dimensionnement devient
$$\sigma_{\max} \text{ en service} \leq \sigma_{\text{ruine}}/\gamma$$
 - exemple : acier courant

Conception semi-probabiliste

- Notion probabiliste de la sécurité
 - historique : CEB 1953, CECM 1978, aujourd'hui Eurocodes tous matériaux
 - vise à une sécurité mieux définie
 - la vérification des contraintes admissibles ne suffit pas
 - tenir compte des incertitudes de manière probabiliste
 - attention à la transposition des règles
 - exemple du treillis articulé

États limites

- Définition
 - état dans lequel une structure n'est plus apte à remplir la fonction à laquelle elle est destinée
- États limites ultimes (ou de ruine) - **ELU**
 - **ruine**, effondrement, structure hors d'usage
- États limites de service (d'utilisation) - **ELS**
 - structure inutilisable, dangereuse mais **recupérable**

États limites ultimes (ELU)

- rupture : contrainte excessive, matériau déficient, boulons
- perte d'équilibre global
- instabilités
- rupture par fatigue
- rupture fragile
- déplacements excessifs

États limites de service (ELS)

- structure trop déformable
- déplacements localement excessifs
- vibrations exagérées
- fissuration excessive
- dégradations

Calculs aux états limites

- but : maintenir la probabilité d 'atteindre un état limite inférieur à une certaine valeur

Etat limite	En service	En cours de montage
ELU	10^{-5}	$4 \cdot 10^{-4}$
ELS	$5 \cdot 10^{-2}$	-

- approche *semi*-probabiliste

ELx : valeurs caractéristiques

- Notations : indice k
- les résistances caractéristiques
(propriétés mécaniques au sens large)
- les actions caractéristiques
- la valeur caractéristique a une probabilité fixée pour que les valeurs effectives soient
 - supérieures pour les résistances
 - inférieures pour les actions

ELx : valeurs de calcul

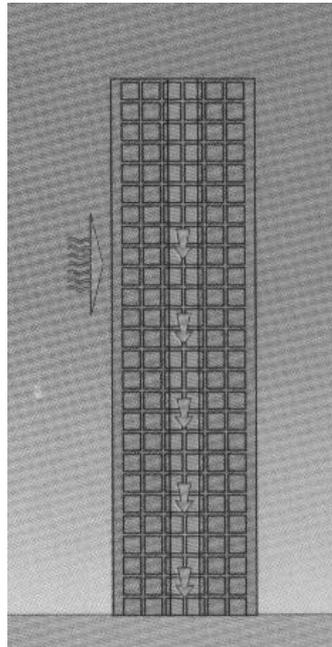
- Notations : indice dim ou d
- autres facteurs d'incertitude : coefficients de pondération
 - facteurs de résistance (≤ 1)
 - facteurs de charge
(≥ 1 si défavorable, ≤ 1 si favorable)
- condition de sécurité :

$$S_d \leq R_{dim}$$

Actions sur les structures

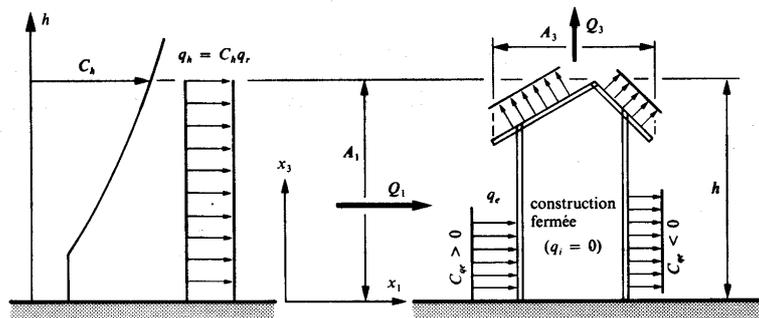
- statique - dynamique
- charges permanentes (poids propre)
- charges d'exploitation (foule, neige, vent, ...)
- actions indirectes (T, tassements, fluage ...)
- actions dynamiques (vent, machines, ...)
- actions exceptionnelles (chocs, séismes, ...)

équilibre global ...

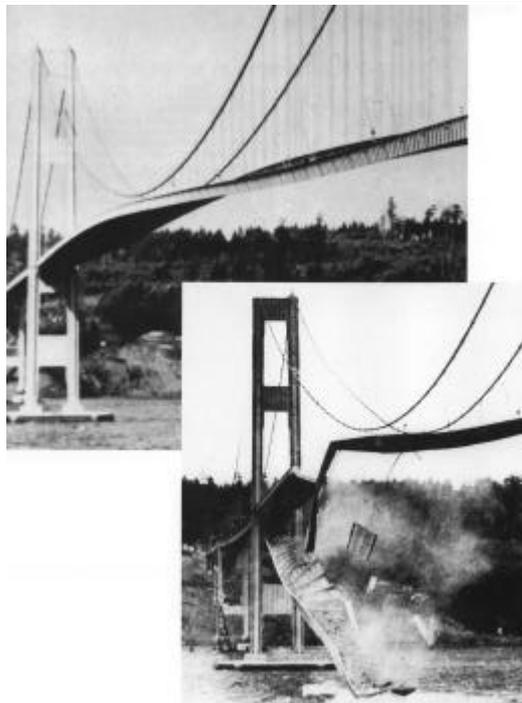


action du vent : effets statiques ...

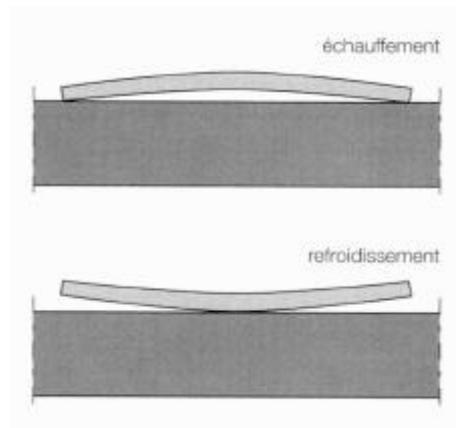
- dépend de la géométrie, de la direction, ...
- actions statiques (pressions, dépressions)



actions du vent :
effets dynamiques ...



actions indirectes :
effets de température ...



actions exceptionnelles : séismes ...

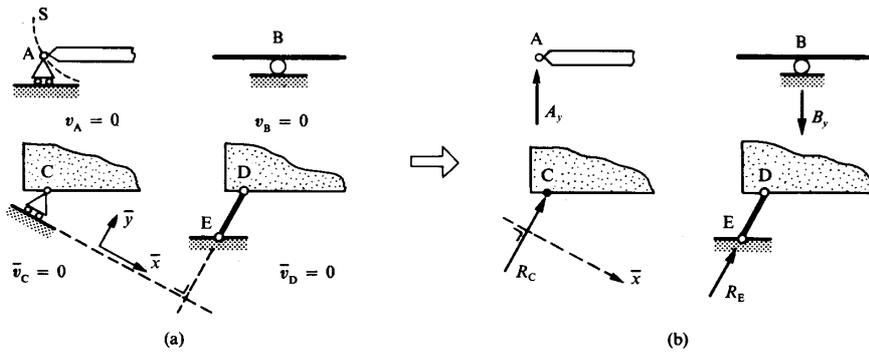


3 - Appuis et liaisons

Appuis et modélisation

- appuis usuels :
 - appui à dilatation (*rouleaux*)
 - articulation
 - encastrement
- isostaticité des appuis
- réactions de liaison
- modélisation : schéma statique

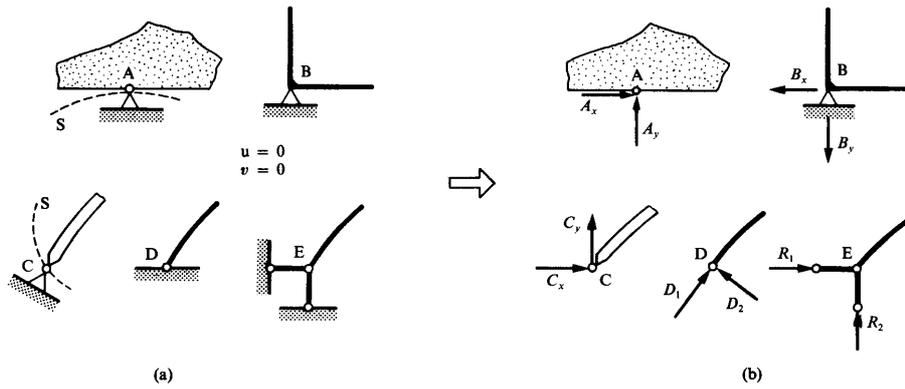
appui à dilatation



appui à dilatation ...



articulation



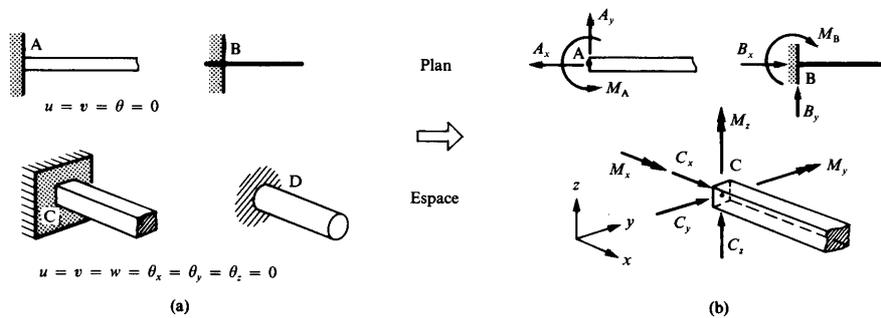
articulation ...



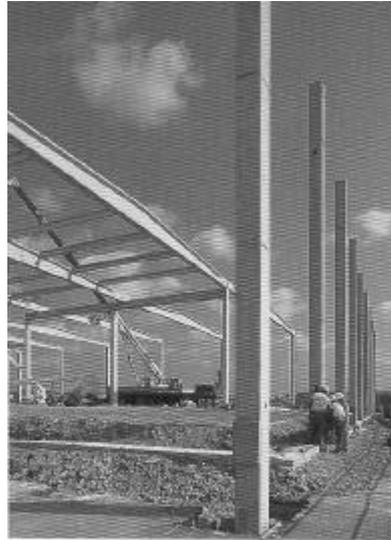
articulation ...



encastrement



encastrement ...



*ossature de éléments préfabriqués en béton
d'un bâtiment industriel en cours de montage.
Au premier plan, les poteaux, scellés dans leur fondation,
sont prêts à recevoir les poutres de la couverture.*

réactions de liaison 2D

	Rouleau			Articulation			Encastrement		
Grandeur cinématique	$u \neq 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta \neq 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\theta = 0$
Grandeur statique	$A_x = 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M = 0$	$A_x \neq 0$	$A_y \neq 0$	$M \neq 0$

Appuis usuels (cas plan).



schéma statique ...

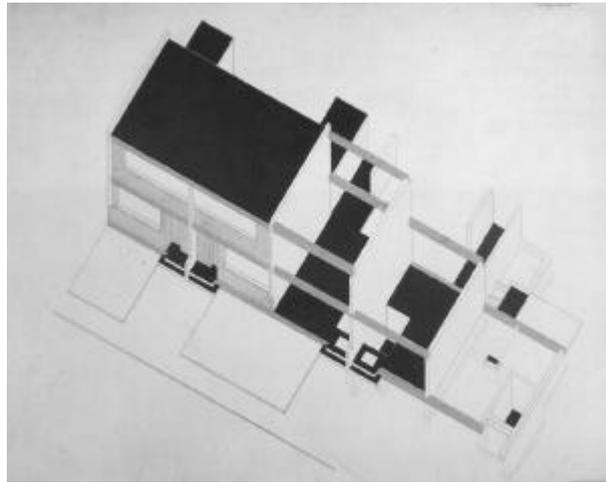
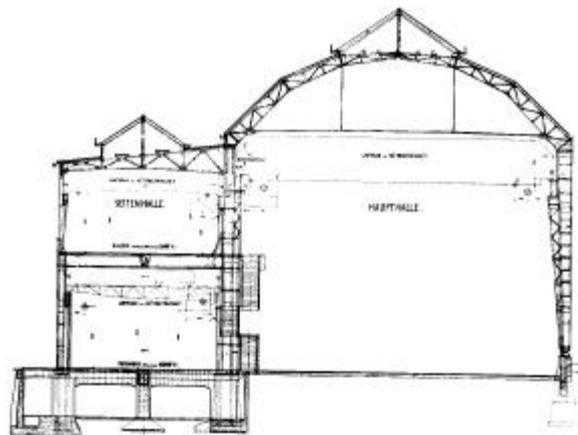
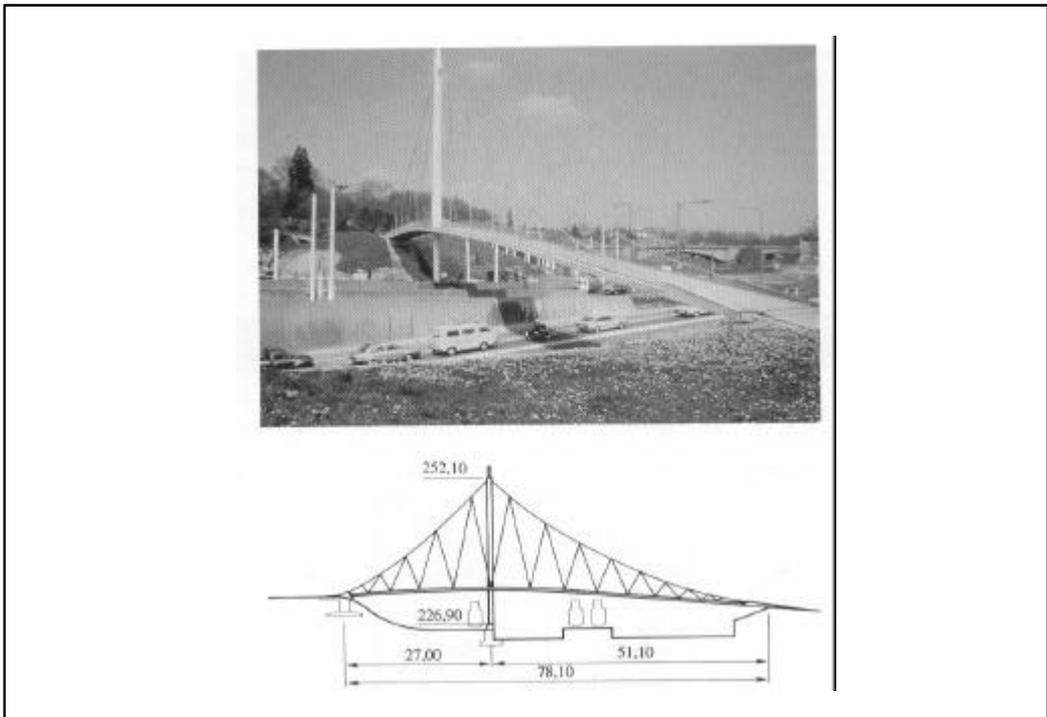
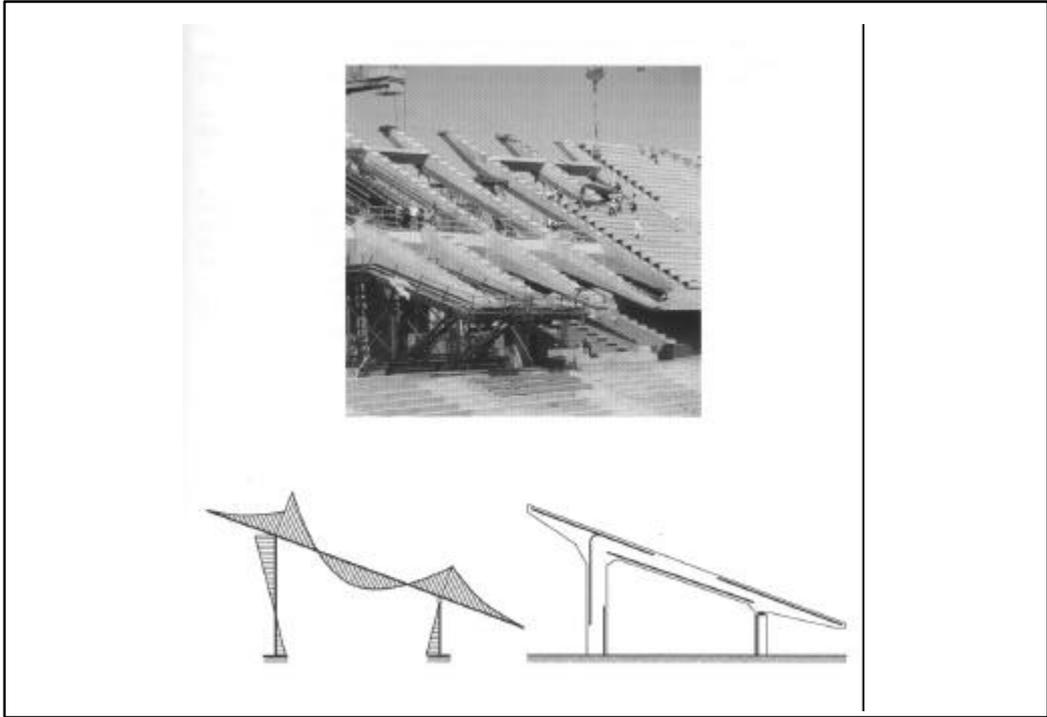
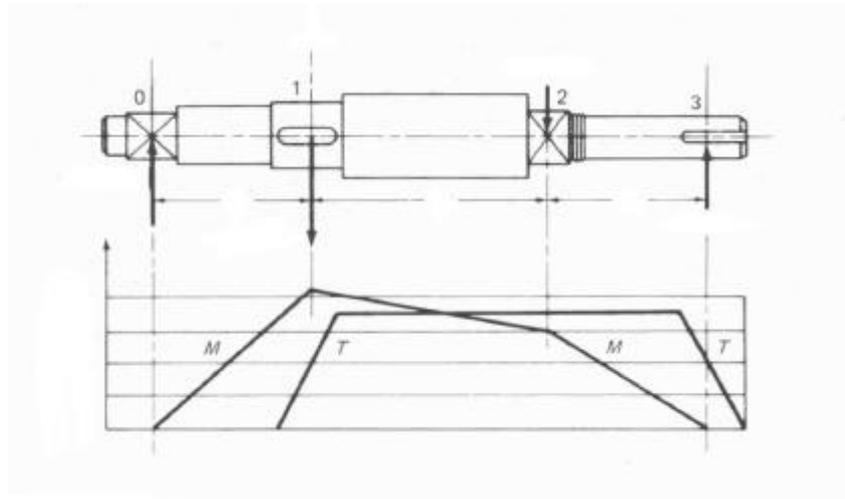


schéma statique ...



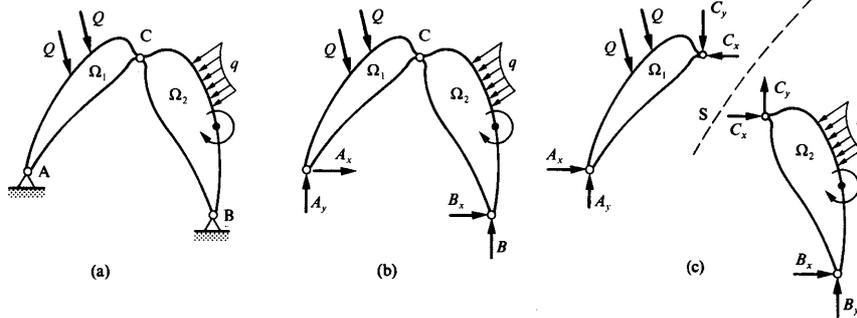




Structures composées (liaisons)

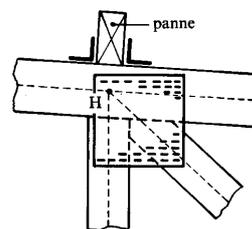
- définitions
- organes de liaison
- force de liaison
- analyse des structures composées

liaisons



Etude d'une structure composée: (a) donnée; (b) extériorisation des seules réactions; (c) dislocation extériorisant les forces de liaison et les réactions.

organes de liaison ...



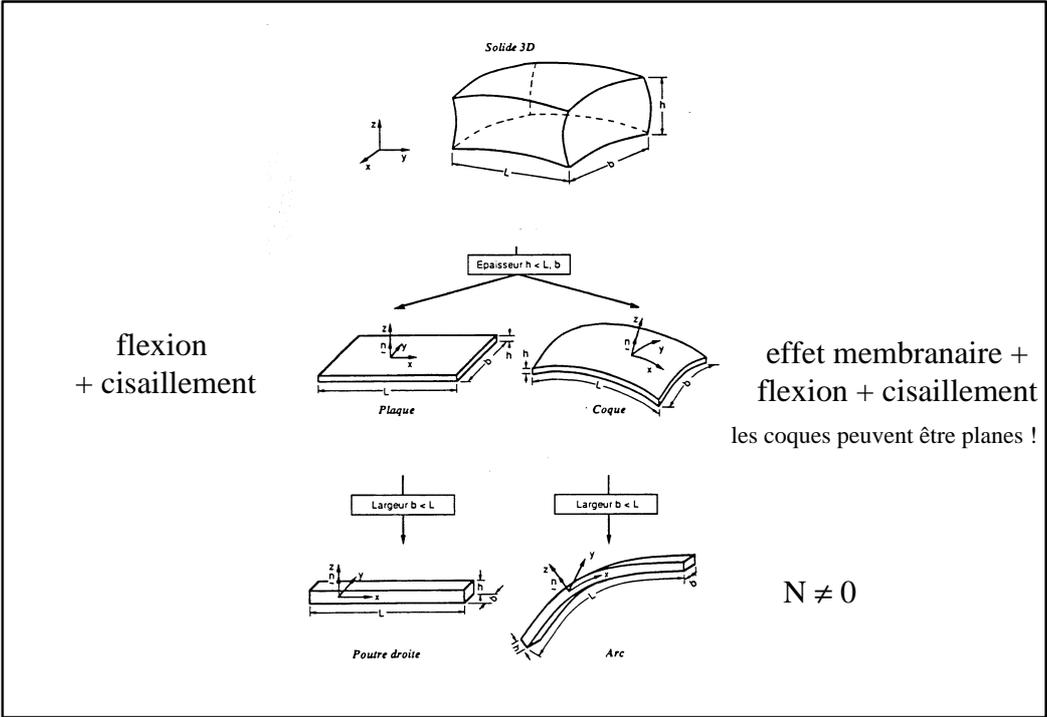
Nœud d'une ferme (assemblage Gangnail)

organes de liaison ...



Éléments structuraux

- Les structures peuvent être (grossièrement) classées en :
 - solides 3D : aucune simplification
 - coques (minces ou épaisses) : $N_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}$
 - plaques (minces ou épaisses) : $T_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}$
 - membranes (états plans, état axisymétrique) : $N_{\alpha\beta}$
 - poutres ou arcs (minces ou épaisses) : $N_x + T_y + M_z + \dots$
 - barres : N_x uniquement
 - câbles : $N_x > 0$ uniquement



structures en barres ...



Pont de chemin de fer sur le Forth, Edimbourg, Ecosse, 1890

2,5 km, portée 521 m

structures en poutres ...



Max Berg, Jahrhunderthal à Breslau, 1911-13

P. Gössel & G. Leuthäuser, L'architecture au XX^{ème} siècle, Taschen, 1991

structures en plaques ...



P. Schneider-Esleben, Garage à Düsseldorf, 1949-50

P. Gössel & G. Leuthäuser, L'architecture au XX^{ème} siècle, Taschen, 1991

structures en coques ...



arch. E. Saarinen & eng. F. Severud, Université de Yale, 1953-59

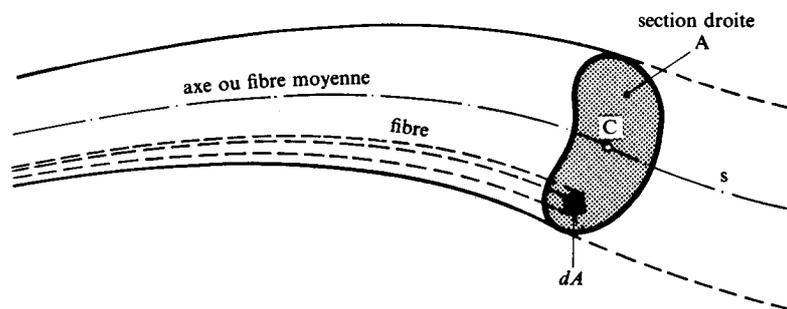
P. Gössel & G. Leuthäuser, L'architecture au XX^{ème} siècle, Taschen, 1991

4 - La poutre

La poutre : géométrie

- engendré par une figure plane A de sorte que
 - le centre C parcourt une ligne donnée (*axe* ou *fibre moyenne*)
 - A reste constamment normal à cette ligne
 - les dimensions de A restent petites devant la longueur
- la section A varie de manière lente et progressive
- si l'axe est droit, la poutre est dite prismatique
- principe de la coupe : section droite

La poutre : géométrie



Géométrie d'une poutre.

La poutre : nature des forces internes

- Coupe S dans une poutre AB \Rightarrow liaisons
- Résultantes internes : 3 (2D) ou 6 (3D)
- Orientation des axes et des résultantes
- Efforts internes N, T, M
- Conventions de signe

forces internes -sollicitations

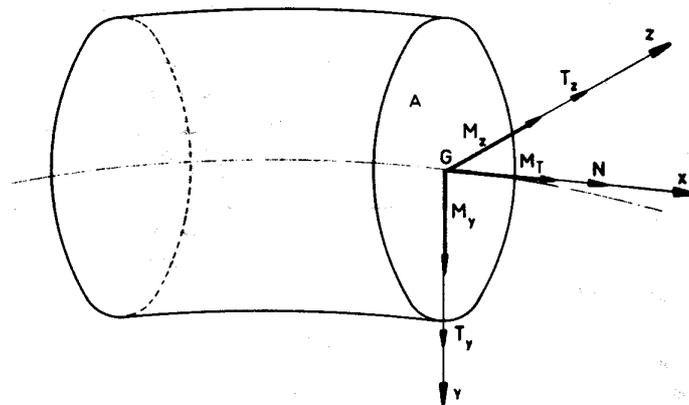


schéma statique

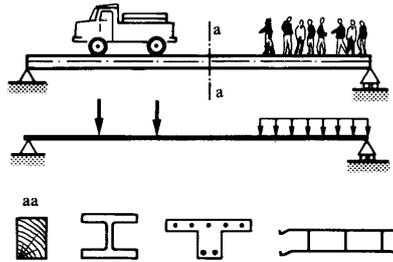
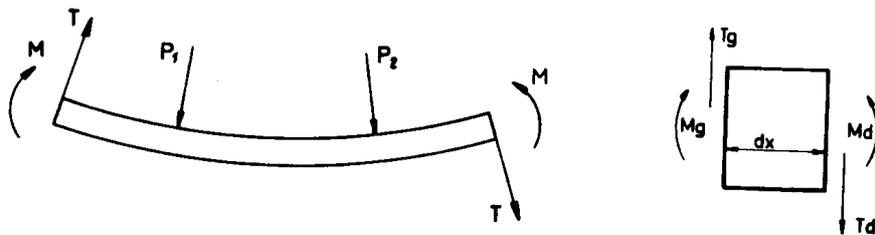


Schéma statique d'une poutre (section droite aa: équarri en bois; laminé en acier; béton armé; extrudé en aluminium).

conventions de signe

- $N > 0$ si traction
- $M > 0$ si fibres tendues vers le bas
- $T > 0$ lorsque la partie droite descend



définition des sollicitations (2D)

- Effort normal

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

- Efforts tranchants

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

- Moments fléchissants

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

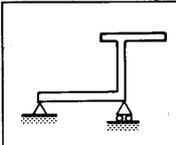
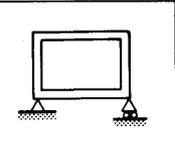
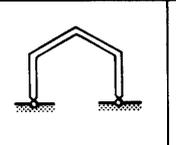
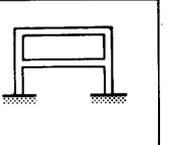
- Moment de torsion

$$M_x = M_T = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$$

Poutres prismatiques planes

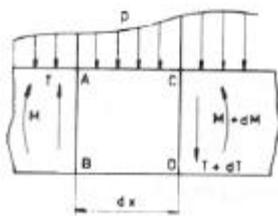
- Isostaticité - hyperstaticité
- Relation Moment fléchissant-Effort tranchant
- Exemple : poutre uniformément chargée
- Exemple : poutre à charge concentrée
- Principe de superposition

Isostaticité - hyperstaticité

				
Extérieurement (appuis)	I	I	H	H
Intérieurement (poutre)	I	H	I	H
Globalement (structure)	I	H	H	H

Isostaticité (I) et hyperstaticité (H) des poutres (cas plan).

Relation M-T



équilibre de translation vertical

$$\begin{aligned}
 -T + q(x)dx + T + dT &= 0 \\
 \frac{dT}{dx} &= -q(x)
 \end{aligned}$$

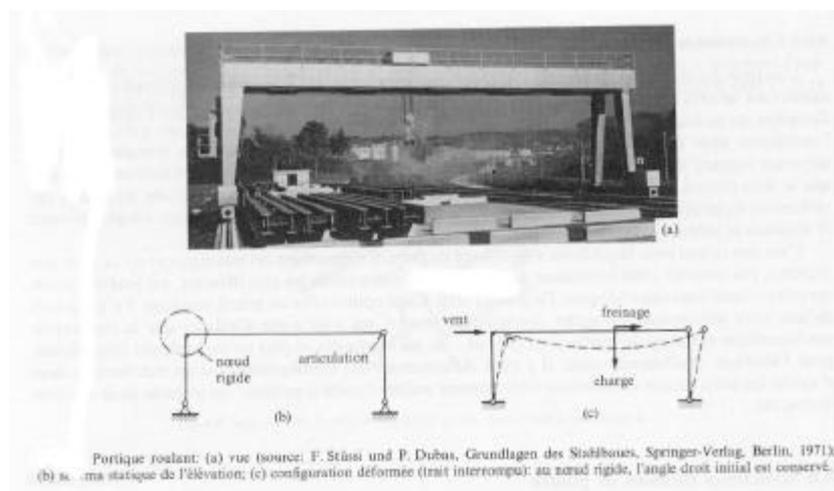
équilibre de rotation vertical

$$\begin{aligned}
 M + Tdx - q(x)dx \frac{dx}{2} - M - dM &= 0 \\
 \frac{dM}{dx} &= T
 \end{aligned}$$

Déformée des poutres planes

- déformée ou ligne élastique
- quelques règles simples
 - point d'inflexion $\Rightarrow M = 0$
 - les angles sont conservés aux nœuds rigides
 - respecter les conditions cinématiques
 - la portée d'une poutre ne varie pas

exemple : portique



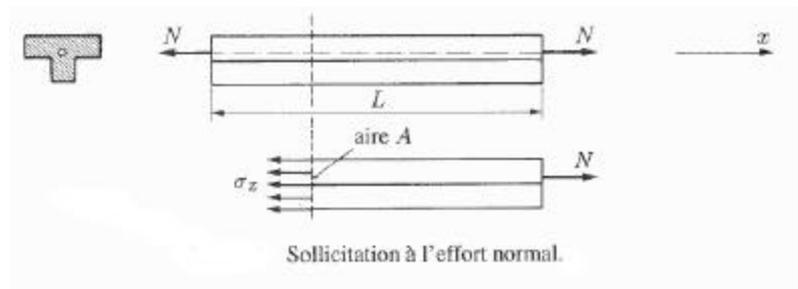
Les cas de sollicitations

N	T _y	T _z	M _x	M _y	M _z	dénomination
≠ 0	0	0	0	0	0	traction simple
0	0	0	0	0	≠ 0	flexion pure
0	≠ 0	0	0	0	≠ 0	flexion simple
≠ 0	≠ 0	0	0	0	≠ 0	flexion composée
0	≠ 0	≠ 0	0	≠ 0	≠ 0	flexion oblique
0	0	0	≠ 0	0	0	torsion

5 - Traction et compression (simples)

Traction et compression (simples)

- définition



Traction et compression

- méthode inverse
 - on postule le tenseur des contraintes
 - on vérifie les équations d'équilibre
 - et les équations de compatibilité (!)
- postulons

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec σ constant

Traction et compression

- équations d'équilibre en volume

– $\partial_j \tau_{ij} + f_i = 0$ satisfaites avec $f_i = 0$

- équations d'équilibre en surface

– $\sigma \bar{I}_x A = N \bar{I}_x$ est en équilibre avec N

- calcul des déformations évanouissantes

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma/E & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\sigma/E & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma/E \end{pmatrix}$$

Traction et compression (simples)

- équations de compatibilité

– $\delta_{ijk} \delta_{pqr} \partial_{jq} a_{kr} = 0$ est satisfait puisque a_{ij} est constant

- calcul du champ de déplacement

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ u &= \frac{\sigma}{E} x + A(\text{C.L.}) \\ u_{\text{MAX}} &= \frac{NL}{EA} \end{aligned}$$

Sécurité des pièces tendues (comprimées)

- méthode des contraintes admissibles (déterministe)

– $|\sigma| \leq \sigma_{\text{adm}}$

- méthode des états limites

– ELU $|\sigma_d| \leq \sigma_{\text{dim}}$

– ELS $|u_d| \leq u_{\text{dim}}$

- ATTENTION : compression \Rightarrow flambement !!!

Sécurité : exemple

- barre en acier soumise à N uniquement

- méthode des contraintes admissibles

– $\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_e}{\gamma}$

- méthode des états limites

– ELU : $N_d = \gamma_F N \Rightarrow \sigma_d = \frac{\gamma_F N}{A} \leq \sigma_{\text{dim}}$

- valeurs usuelles (acier) :

– $\sigma_{\text{dim}} = \sigma_e$ et $\gamma_F = \gamma = 1.5$

- ccl : sécurité identique dans les 2 cas

Dimensionnement

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

A est le **module de résistance** en traction/compression

$$u = \frac{NL}{EA}$$

EA est le **module de rigidité** en traction/compression

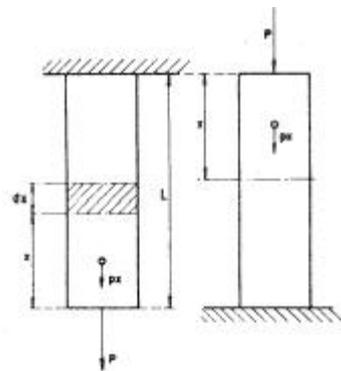
Prise en compte du poids propre

- poids linéique $p = \rho g A$
- effort normal $N = P + px$

$$\sigma_x = \frac{P + px}{A}$$

- sécurité déterministe

$$\begin{aligned} & - \quad |\sigma_x| \leq \sigma_{adm} \\ & \quad \Downarrow \\ & A \geq \frac{P}{\sigma_{adm} - \rho g L} \end{aligned}$$



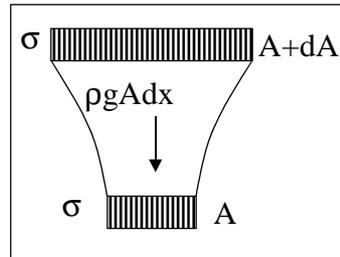
Poutre d'égalé résistance

$$\sigma(A + dA) = \sigma A + \rho g A dx$$

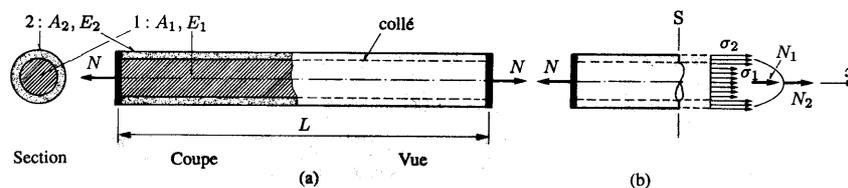
$$\sigma dA = \rho g A dx$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{\rho g}{\sigma} dx$$

$$A = A_0 \exp\left(\frac{\rho g x}{\sigma}\right)$$



Poutre composée de 2 matériaux



Pièce composée de deux matériaux et soumise à traction.

- 1 équation d'équilibre

$$N = N_1 + N_2 = A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2$$

- 1 condition cinématique nécessaire

Poutre composée de 2 matériaux

- condition cinématique $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

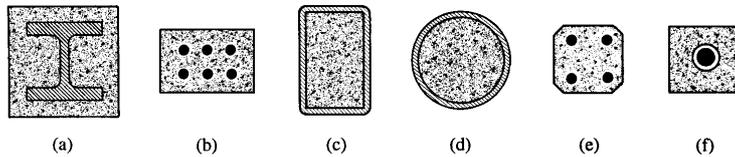
$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1}{E_1} &= \frac{\sigma_2}{E_2} \\ \frac{N_1}{E_1 A_1} &= \frac{N_2}{E_2 A_2} \\ N_1 &= N \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \text{ et } N_2 = N \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \\ \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} \text{ et } \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} \\ u &= \frac{NL}{E_1 A_1 + E_2 A_2}\end{aligned}$$

Poutre composée de n matériaux

$$\begin{aligned}N_i &= N \frac{E_i A_i}{\sum_j E_j A_j} \\ \sigma_i &= \frac{N_i}{A_i} \\ u &= \frac{NL}{\sum_j E_j A_j}\end{aligned}$$

Pièces composées acier-béton

- application de pièces composée de 2 matériaux
- adhérence béton-acier suffisante - calcul élastique



Coupes de pièces composées acier-béton ; (a)-(d) colonnes : (a) poutre laminée enrobée (protection contre l'incendie), (b) béton armé (armatures longitudinales), (c) et (d) tubes remplis de béton ; (e)-(f) tirants : (e) tirant avec armatures passives ou barres de précontrainte, (f) tirant avec câble de précontrainte sous gaine.

Pièces composées acier-béton

$$n = \frac{E_a}{E_b} \quad \begin{array}{l} \text{coefficient d'équivalence} \\ \text{rapporté à l'acier} \end{array}$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_b} \sigma_b = n \sigma_b \Rightarrow \sigma_b = \frac{\sigma_a}{n}$$

$$N = \sigma_a A_a + \sigma_b A_b = \sigma_a A_a + \frac{\sigma_a A_b}{n}$$

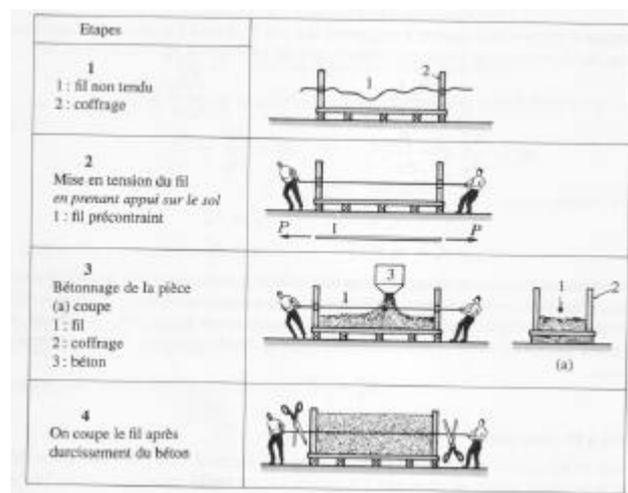
$$N = \sigma_a \left(A_a + \frac{A_b}{n} \right) = \sigma_a \tilde{A}_a$$

$$\sigma_a = \frac{N}{\tilde{A}_a} \quad \sigma_b = \frac{\sigma_a}{n} \quad u = \frac{NL}{E_a \tilde{A}_a}$$

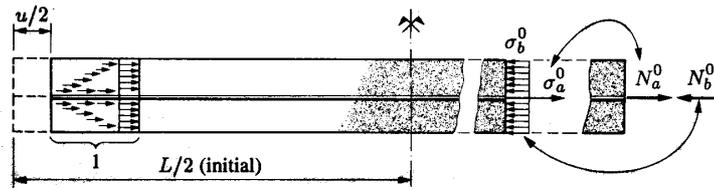
Principe de la précontrainte

- un matériau atteint sa limite de résistance,
- l'autre pas $\Rightarrow \exists$ réserve de résistance
- exemples
 - précontrainte de compression : béton, boulons HR
 - précontrainte de traction : câbles, ressorts

Pièces à fils adhérents (prétension)

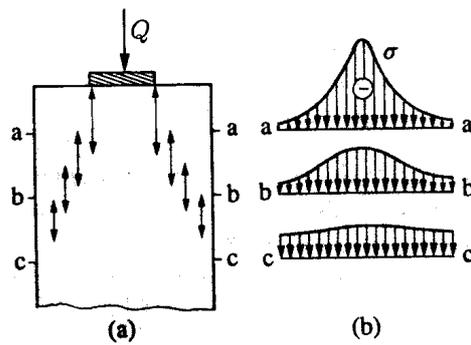


Prétension : modélisation



Mécanique de la précontrainte par fil adhérent
(1 : zone de mise en compression uniforme, illustrant le principe de Saint-Venant).

Observations de Saint-Venant



Principe de Saint-Venant

Observations de Saint-Venant

- on montre par expérience et par calculs
 - ‘à une distance de l’extrémité égale à la plus grande dimension transversale de la pièce, la répartition des contraintes normales sur une section droite est pratiquement uniforme’
- vrai pour toute perturbation locale
 - par l’introduction de force (force concentrée, appui, cordon de soudure, ancrage, ...)
 - dans la transmission des efforts intérieurs (variation de section, trou, jonctions, ...)

Principe de Saint-Venant

« Dans la section droite d’une poutre, la distribution de contraintes due à un système de forces, appliquées à une certaine distance de cette section, ne change pas si l’on substitue à ces forces un autre système, provoquant les mêmes efforts intérieurs ; seules changent, sur une longueur égale à une à deux fois la plus grande dimension transversale de la poutre, les contraintes locales provoquées par l’introduction de forces. »

Saint-Venant : remarques

- contraintes et déformations ne dépendent donc que des efforts intérieurs (solllicitations)
- ne permet pas d'analyser les zones localement perturbées
- validité du principe de Saint-Venant
 - poutres massives
 - pas poutres à parois minces ni poutres en treillis

Prétension : modélisation

- étape 2
≡(2)

$$\begin{array}{l} N'_a = P \quad N'_b = 0 \\ \sigma'_a = \frac{P}{A_a} \quad \sigma_b = 0 \end{array}$$

- étape 4
½(4)

$$\begin{array}{l} N''_a = -\frac{PE_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b} \quad N''_b = -\frac{PE_b A_b}{E_a A_a + E_b A_b} \\ \sigma''_a = \frac{N''_a}{A_a} = -\frac{P}{\tilde{A}_a} \quad \sigma''_b = \frac{N''_b}{A_b} = \frac{\sigma''_a}{n} \end{array}$$

Prétension : modélisation

- superposition

$$\begin{aligned} N_a^0 &= N'_a + N''_a & N_b^0 &= N''_b \\ \sigma_a^0 &= \sigma'_a + \sigma''_a & \sigma_b^0 &= \sigma''_b \end{aligned}$$

- état de sollicitation
- état d'*autocontrainte*

$$N_a^0 + N_b^0 = 0$$

Prétension : modélisation

- application d'une force extérieure Q

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{P}{A_a} - \frac{P}{\tilde{A}_a} + \frac{Q}{\tilde{A}_a} \\ \sigma_b &= -\frac{P}{n\tilde{A}_a} + \frac{Q}{n\tilde{A}_a} \end{aligned}$$

- choix de \tilde{A}_a pour que les 2 matériaux atteignent leur résistance

Pièces à fils sous gaine (post-tension)

Etapas	
<p>1 Bétonnage de la pièce (a) coupe 1 : câble non tendu 2 : gaine 3 : support de la gaine 4 : coffrage</p>	
<p>2 Mise en tension du câble en prenant appui sur la section de béton, après durcissement du béton 1 : câble 2 : gaine 3 : béton 4 : vérin</p>	
<p>3 Blocage du câble aux extrémités (divers systèmes de blocage) et injection</p>	

Post-tension : modélisation

- effort de traction à l'étape 2

$$\begin{aligned} N_a^0 &= P & N_b^0 &= -P \\ \sigma_a^0 &= \frac{P}{A_a} & \sigma_b^0 &= -\frac{P}{A_b} \end{aligned}$$

- application d'une force extérieure Q

$$\sigma_a = \frac{P}{A_a} + \frac{Q}{\tilde{A}_a} \quad \sigma_b = -\frac{P}{A_b} + \frac{Q}{n\tilde{A}_a}$$

Propriétés de la précontrainte

$$\tilde{A}_a \gg A_a \Rightarrow \frac{P}{A_a} \gg \frac{Q-P}{\tilde{A}_a} \quad \text{et} \quad \frac{P}{A_a} \gg \frac{Q}{\tilde{A}_a}$$

- la force extérieure modifie peu la précontrainte
- pertes : stabilité dans le temps
 - béton $\pm 15\%$ \Rightarrow acier à très haute résistance

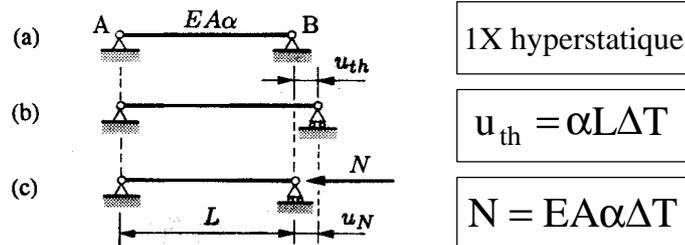
Effets thermiques

- barre homogène, température initiale T_1
- α = coefficient de dilation thermique ($1/^\circ\text{C}$)
 - $\alpha_{\text{acier}} = \alpha_{\text{béton}} = 1.2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
- élévation uniforme de température $\Delta T = T_2 - T_1$
- dilatation thermique

$$\varepsilon_{\text{th}} = \alpha \Delta T$$

Effets thermiques

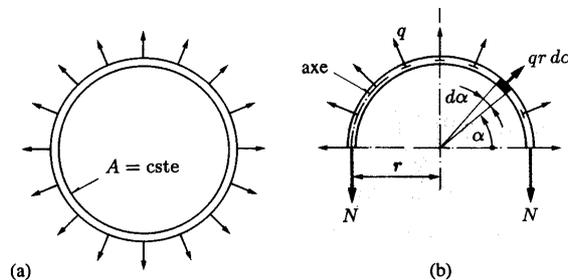
- si structure libre de se dilater, pas de contraintes
- si dilatation empêchée (structure hyperstatique)



$$\varepsilon_{th} + \varepsilon_{\sigma} = 0 \Rightarrow \alpha \Delta T + \frac{\sigma_{th}}{E} = 0 \Rightarrow \sigma_{th} = -E\alpha \Delta T$$

Tubes ou anneaux

- définition : poutre d'axe circonférentiel
- chargement radial \Rightarrow symétrie de révolution



Anneau

Anneaux : modélisation

- équation d'équilibre

$$-2N + 2 \int_0^{\pi/2} qr \sin \alpha d\alpha = -2N + 2qr = 0$$

$$N = qr$$

- dimensions section droite \ll épaisseur

$$\sigma_{\theta} \cong \text{cst} = \frac{qr}{A}$$

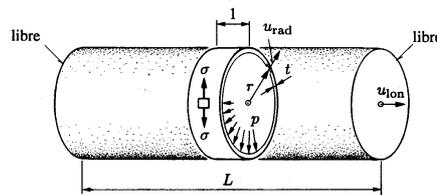
$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E} = \frac{qr}{EA} \Rightarrow u_r = \varepsilon_{\theta} r = \frac{qr^2}{EA}$$

Tubes libres de se déformer longitudinalement

- si $t \leq r/10$

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr}{t}$$

(formule des chaudières)

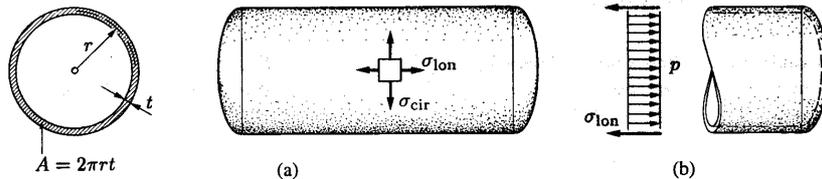


Tube libre de se dilater axialement.

- déplacement longitudinal (effet de Poisson)

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_{\theta} \Rightarrow u_z = -\nu \varepsilon_{\theta} L = -\nu \frac{prL}{Et}$$

Réceptient sous pression



Réceptient cylindrique sous pression interne.

- action sur le joint $F = \pi r^2 p$
- contrainte longitudinale dans l'anneau

$$\sigma_z = \frac{F}{2\pi r t} = \frac{pr}{2t} = \frac{1}{2}\sigma_\theta$$

Réceptient sous pression

- z et θ sont les directions principales

$$-p \leq \sigma_r \leq 0 \text{ et } \sigma_r \ll \sigma_\theta$$

- état de plan de contraintes
 - permet le calcul de a_{ij} et u_i
- Saint-Venant
- vrai \forall matériaux

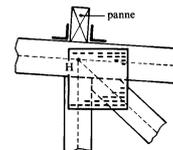
Tubes longitudinalement indéformables

- contrainte circonférentielle
 - cf. récipient sous pression
- contrainte longitudinale
 - état plan de déformation ($\epsilon_z=0$)
 - matériau élastique isotrope

$$\sigma_z = \nu \sigma_\theta$$

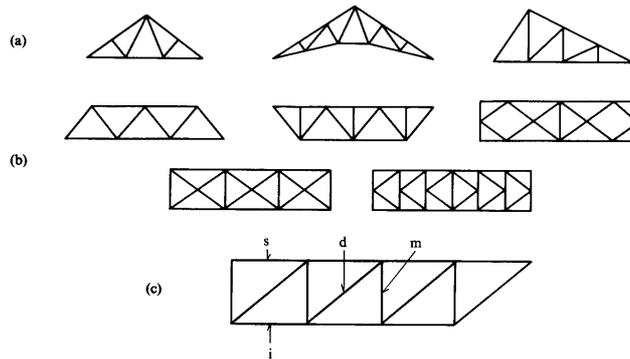
Treillis articulés

- définition
 - ensemble de barres assemblées les unes aux autres par à leurs extrémités articulées
 - nœud = points de rencontre des barres
- schéma statique
 - articulations parfaites
 - axes concourants
 - actions aux nœuds



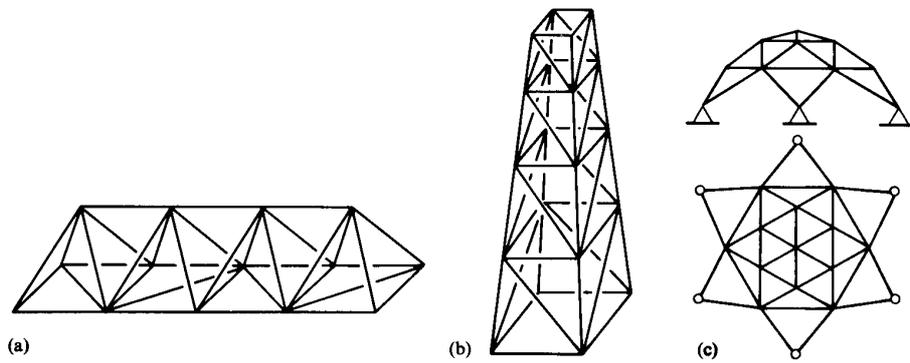
Nœud d'une ferme (assemblage Gangnail)

Treillis plans



Treillis plans: (a) fermes; (b) poutres en treillis en V, en V avec montants, en losange, en K, en croix de St-André; (c) poutre en treillis en N (s: membrure supérieure; i: membrure inférieure; d: diagonale; m: montant).

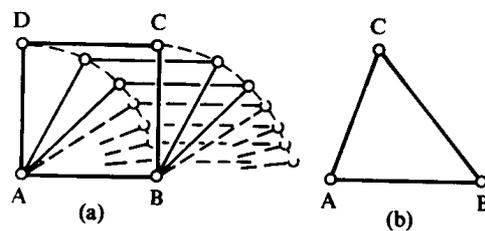
Treillis spatiaux



Treillis spatiaux: (a) poutre; (b) mât; (c) coupole.

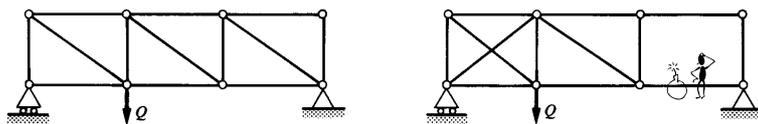
Géométrie

- triangle = cellule de base du treillis
- treillis carré est instable



Condition nécessaire d'isostaticité

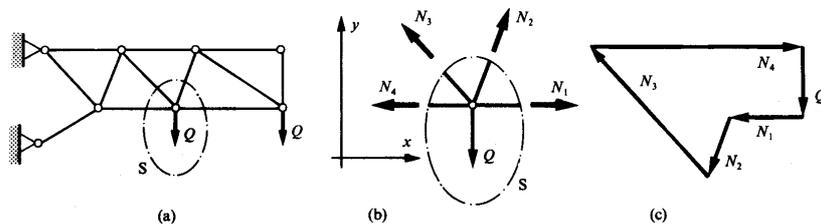
- 2D : $b + r = 2n$ (3D : $b + r = 3n$)
- $b = \#$ barres, $r = \#$ réactions, $n = \#$ nœuds
- attention aux mécanismes internes !!!



Treillis rigide et mécanisme.

Équilibre aux nœuds

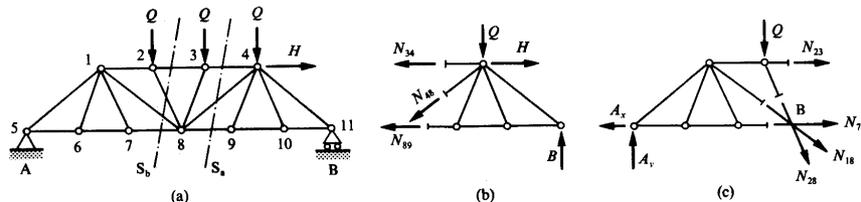
- isoler un nœud en coupant les barres qui y aboutissent
- extérioriser les efforts normaux et les efforts extérieurs
- écrire les équations d'équilibre



Equilibre d'un nœud: (a) coupe autour d'un nœud; (b) schéma du nœud isolé; (c) polygone des forces (fermé).

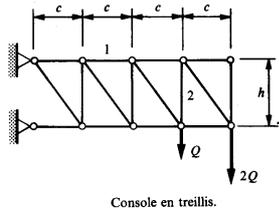
Coupe de Ritter

- principe de la coupe \Rightarrow équilibre des fragments
- coupe de Ritter
 - calculer les réactions
 - coupe idéale : coupe 3 barres, 1 seule inconnue



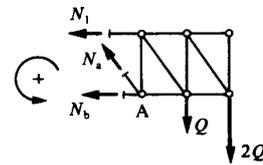
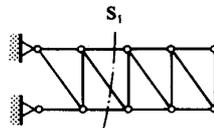
Treillis à résoudre par coupes: (a) coupes; (b) fragment de droite isolé par la coupe S_1 ; (c) fragment de gauche résultant de S_1 .

Coupe de Ritter : exemple



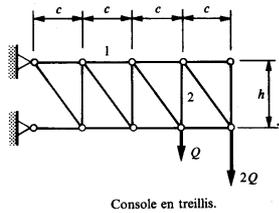
effort dans la barre 1

$$hN_1 - cQ - 4cQ = 0 \Rightarrow N_1 = 5cQ/h$$



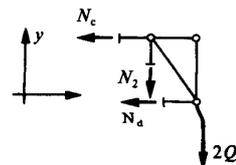
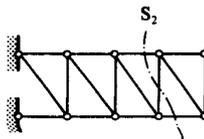
Coupe simple S_1 et fragment de droite isolé.

Coupe de Ritter : exemple



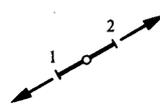
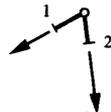
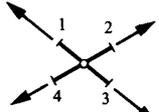
effort dans la barre 2

$$-N_2 - 2Q = 0 \Rightarrow N_2 = -2Q$$



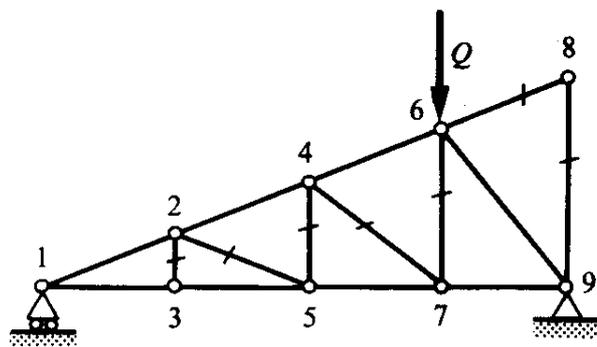
Coupe simple S_2 et fragment de droite isolé.

Quelques nœuds particuliers

Géométrie				
	Barres alignées		Barres 1 et 2 alignées	Barres alignées deux à deux
Propriété	$N_1 = N_2$	$N_1 = 0$ $N_2 = 0$	$N_1 = N_2$ $N_3 = 0$	$N_1 = N_3$ $N_2 = N_4$

Nœuds particuliers.

Barres à effort nul



Barres à effort nul.

Illustration des pièces tendues

- pompe à huile

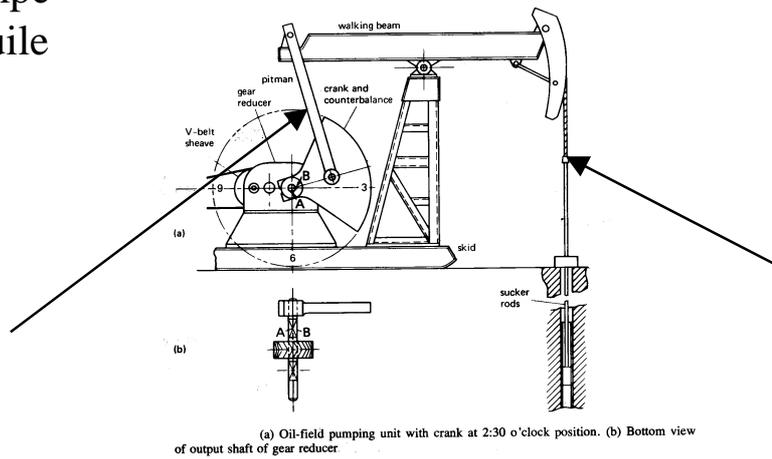


Illustration des pièces tendues

- treillis articulés



fermes



engins de levage



ponts métalliques

Illustration des pièces tendues

- ponts suspendus

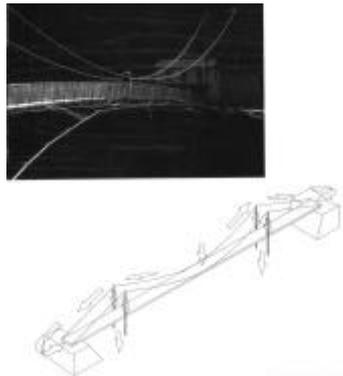


Illustration des pièces tendues

- ponts haubanés

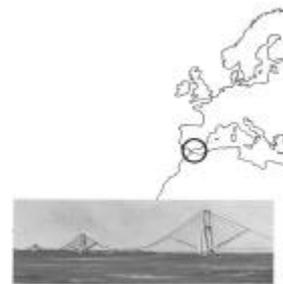
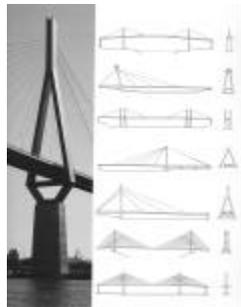


Illustration des pièces tendues

- boutons et tirants

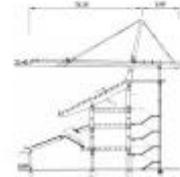


Illustration des pièces tendues

- effet thermique dans les chaussées

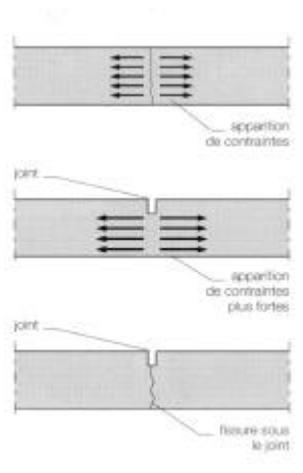
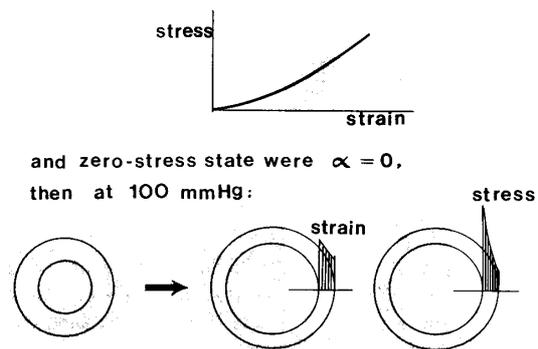


Illustration de la formule des chaudières

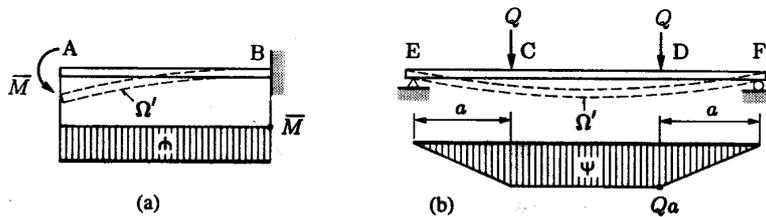
- contraintes circonférentielles dans les veines



6 - Flexion pure

Flexion pure

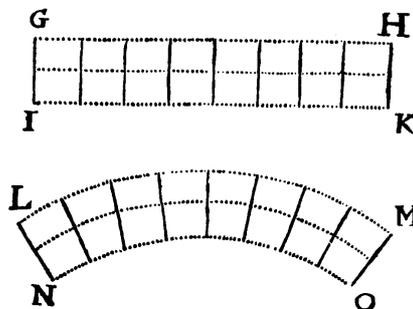
- définition : flexion pure ou circulaire
 - poutre soumise à M constant
 - $T = dM/dx \Rightarrow T = 0$ (!)



Flexion pure (M constant) et flexion simple (M variable).

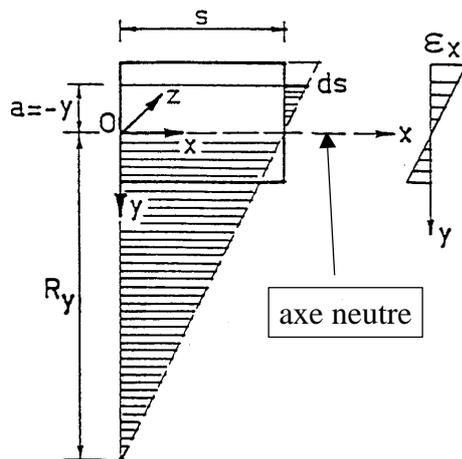
Hypothèse de Bernoulli

- hypothèse cinématique
 - « les sections planes restent planes »



La poutre fléchie de R. Hooke (*De Potentia Restitutiva*, 1678).

Bernoulli : mise en équations



$$\frac{ds}{-y} = \frac{s}{R_y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{ds}{s}$$

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{R_y}$$

R_y est le rayon de courbure

Méthode inverse

- supposons le matériau élastique linéaire
($\Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x$)

- postulons

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{Ey}{R_y} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- équations d'équilibre de translation en volume

$$-\partial_j \tau_{ij} + f_i = 0 \quad \text{satisfaites avec } f_i = 0$$

- équations de compatibilité satisfaites

– car τ_{ij} linéaire

Équilibre de translation en surface

- équations d'équilibre de translation en surface

$$N = \int_A \sigma_x dA = -\frac{E}{R_y} \int_A y dA = 0$$

or, $\int_A y dA = y_G A$

$$T_y = \int_A \tau_{xy} dA = 0$$

$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA = 0$$

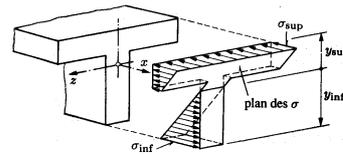


Diagramme des contraintes normales en flexion (section en T).

$$N=0 \Rightarrow y=0 \text{ en } G !$$

Équilibre de rotation en surface

- équations d'équilibre de rotation en surface

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA = -\frac{E}{R_y} \int_A y^2 dA = -\frac{E}{R_y} I_z$$

I_z = moment d'inertie (géométrique) autour de l'axe z (m^4)

$$M_y = \int_A -\sigma_x z dA = \frac{E}{R_y} \int_A y z dA = \frac{E}{R_y} I_{yz}$$

I_{yz} = produit d'inertie

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = 0$$

Flexion plane

- $M_y = 0$
 - flexion dans le plan Oxz uniquement
- $I_{yz} = 0$
 - axes principaux d'inertie

Calcul des contraintes

- calcul du rayon de courbure $\frac{1}{R_y} = -\frac{M}{EI_z}$
- calcul de la contrainte normale
 $\sigma_x = E\varepsilon_x = -\frac{Ey}{R_y} \Rightarrow \sigma_x = \frac{My}{I_z}$
(équation de Navier)
- $\sigma = 0$ en $y = 0$: définition de l'axe neutre

Sécurité des pièces fléchies

- contraintes extrémales aux fibres extrémales

– $\sigma_x = \frac{My_{\text{sup/inf}}}{I_z}$ (équation d'équarrissage)

- méthode des contraintes admissibles (déterministe)

– $\sigma_{\text{sup/inf}} = \frac{My_{\text{sup/inf}}}{I_z} \leq \sigma_{\text{adm}}^{+/-}$

- méthode des états limites

– ELU $\sigma_{\text{d sup/inf}} \leq \sigma_{\text{adm}}^{+/-}$ & ELS

- ATTENTION : fibres comprimées \Rightarrow déversement !!!

Dimensionnement

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z / y_{\text{sup/inf}}}$$

$I_z / y_{\text{sup/inf}}$ est le module de résistance en flexion

$$\frac{1}{R_y} = - \frac{M}{EI_z}$$

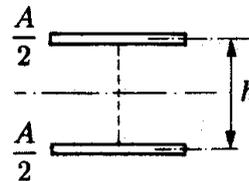
EI_z est le module de rigidité en flexion

Forme rationnelle

- $\sigma_x = \frac{My}{I_z}$ minimiser $\sigma_x \Rightarrow$ maximiser I_z
- or, maximiser I_z $I_z = \int_A y^2 dA \Rightarrow$ maximiser y
- profil idéal

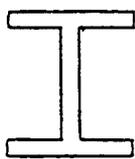
$$I_{th} = 2 \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2$$

$$\left(\frac{I_{th}}{y_{sup/inf}} \right)_{th} = A \frac{h}{2}$$

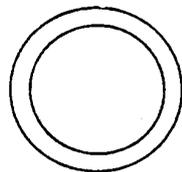


Rendement géométrique

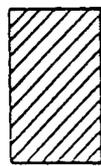
$$\eta_e = \frac{I / y_{sup/inf}}{\left(I / y_{sup/inf} \right)_{th}}$$



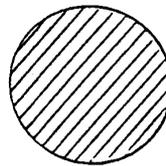
$$\eta_e = 2/3$$



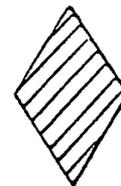
$$\eta_e \approx 1/2$$



$$\eta_e = 1/3$$



$$\eta_e = 1/4$$



$$\eta_e = 1/6$$

Remarques (1/3)

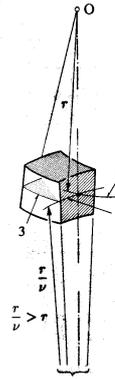
- limitations du profil en I
 - progrès du laminage
 - encombrement transversal des sections
 - largeur efficace
 - résistance au cisaillement
 - corrosion
- facilité de mise en œuvre du profil rectangulaire
 - matériaux peu onéreux (bois, béton)

Remarques (2/3)

- position de l'axe neutre
 - sections dissymétriques
 - σ_{adm} égaux en traction/compression \Rightarrow section symétrique
 - σ_{adm} différents \Rightarrow calcul de la section optimale
- axe fort - axe faible d'une poutre fléchie
- aucun axe de symétrie : attention à la flexion gauche
- Bernoulli : valable même si non homogène transversal (BA, bois, fibres)

Remarques (3/3)

déformation transversale :
effet de Poisson



Déformation de la section droite due au coefficient de Poisson
(1 : axe de la poutre ; 2 : axe neutre ; 3 : surface neutre).

Moments d'inertie géométriques

- la théorie de la flexion fait apparaître des moments d'inertie **géométriques**

(analogie des moments d'inertie du mouvement du solide plan mais ne pas confondre)

$$I_{yy} = I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_{zz} = I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

- I_{ij} est un tenseur d'ordre 2 (et en a les propriétés !)

Moments d'inertie des figures planes

- moment d'inertie par rapport aux axes x et y

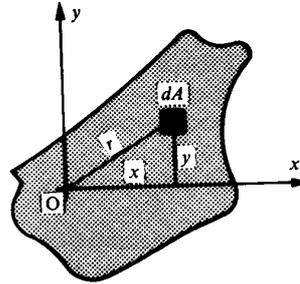
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (\text{toujours } > 0)$$

- produit d'inertie

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (\text{nul si axe de symétrie})$$

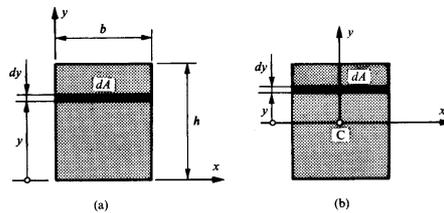
- moment d'inertie polaire

$$I_p = \int_A r^2 dA \quad \Rightarrow \quad I_p = I_x + I_y$$



Moment d'inertie d'un rectangle

$$I_{x \text{ base}} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \frac{bh^3}{3}$$

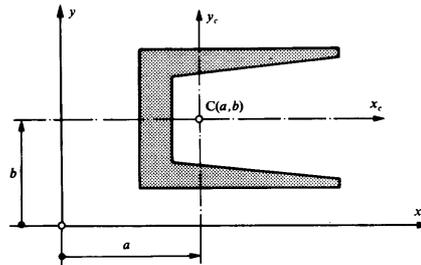


Calcul du moment d'inertie d'un rectangle.

$$I_{x \text{ central}} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

Formule de Huygens/Steiner

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_C} + b^2 A \\ I_y &= I_{y_C} + a^2 A \\ I_{xy} &= I_{x_C y_C} + abA \end{aligned}$$



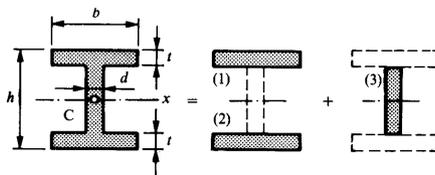
Théorème des axes parallèles.

I_x et I_y sont donc minimaux au centre

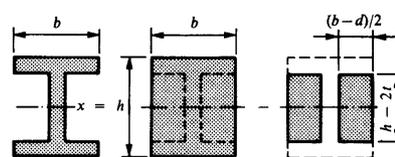
Calcul par décomposition

- décomposition en somme algébrique

$$I_x = \sum (I_{x_{C_i}} + b_i^2 A_i)$$



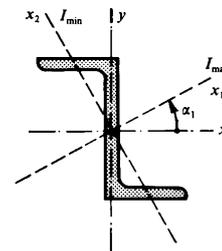
Section en I, somme de trois rectangles.



Autre décomposition de la section en I.

Axes principaux d'inertie

- moments d'inertie I_x et I_y extrémaux
- produit d'inertie I_{xy} nul
 - si un axe (au moins) de symétrie
- détermination des axes principaux par loi de changement d'axes (cercle de Mohr)



Axes principaux centraux du profilé Z8.

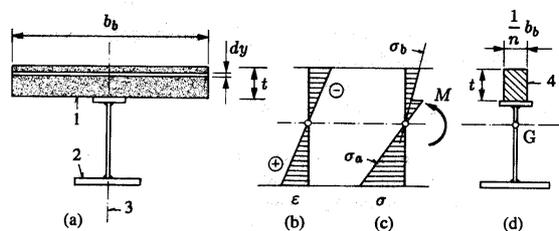
Poutres composées de 2 matériaux

$$\tilde{b}_a = \frac{b_b}{n}$$

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{M}{E_a \tilde{I}_a}$$

$$\sigma_a = \frac{My}{\tilde{I}_a}$$

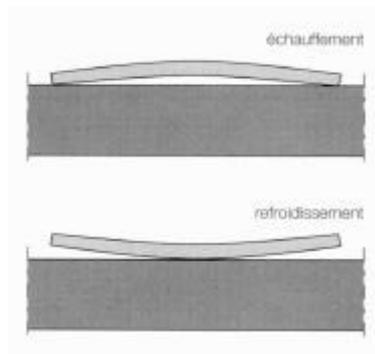
$$\sigma_b = \frac{\sigma_a}{n}$$



Flexion plane d'une poutre faite de deux matériaux (plan de flexion vertical):
 (a) section droite (1 : dalle de béton; 2 : profilé en acier; 3 : plan de flexion); (b) plan des dilatations (élévation);
 (c) plans des contraintes (élévation); (d) section droite équivalente en flexion (4 : acier équivalent;
 G : centre géométrique de la section tout acier).

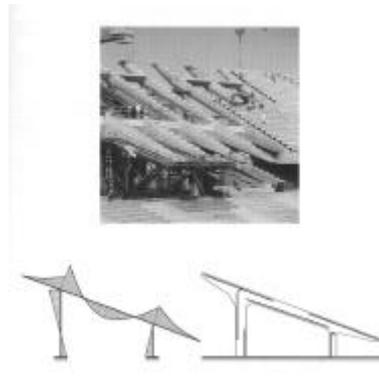
Effets thermiques

- un gradient de température fait apparaître une déformation de flexion



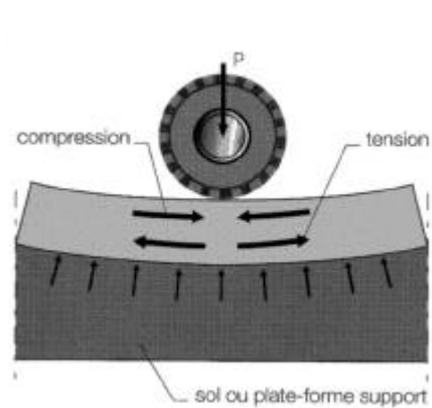
Illustrations des poutres fléchies

- flexion des poutres de construction



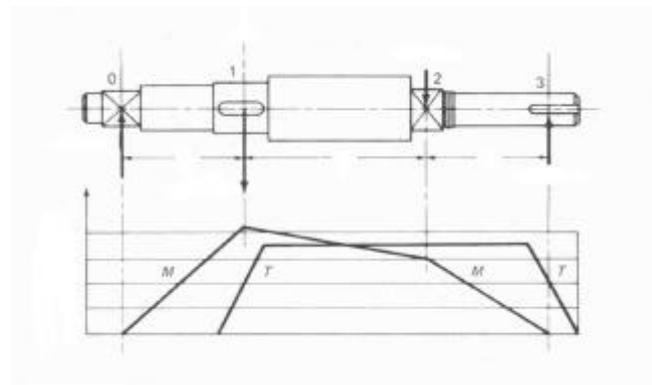
Illustrations des poutres fléchies

- revêtements routiers sous poids des essieux



Illustrations des poutres fléchies

- flexion d'un arbre mécanique



Illustrations des poutres fléchies

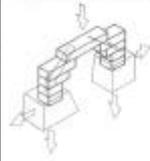
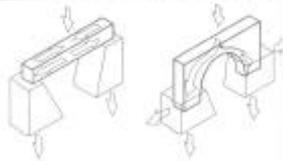
- augmenter I_z

raisonnement intuitif



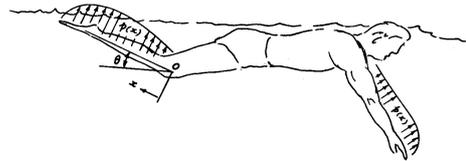
Illustrations des poutres fléchies

- transmission des efforts de flexion

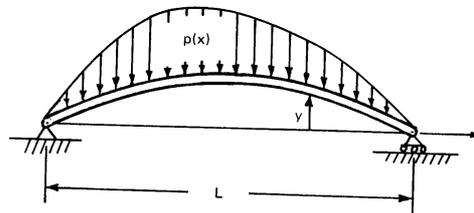


Illustrations des poutres fléchies

- nageur



Forces acting on the arms and legs in swimming.



A simply-supported beam.

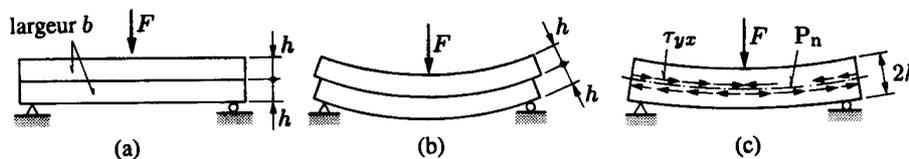
7 - Flexion simple (cisaillement)

Flexion simple

- $M \neq 0$ et $T \neq 0$
- la relation $\sigma_x = \frac{My}{I_z}$ reste valable car
 - l'effort tranchant perturbe peu les contraintes normales
 - la courbure est également peu sensible à l'effort tranchant
- l'effort tranchant est la résultante des contraintes de cisaillement $T_y = \int_A \tau_{xy} dA$

Calcul des contraintes de cisaillement

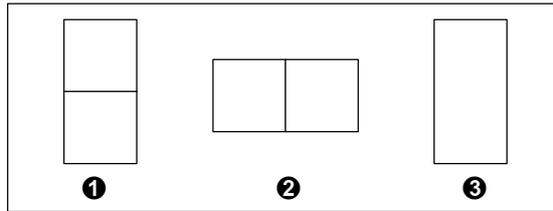
- théorie de Jourawski
- calcul de l'effort rasant car réciprocité des contraintes tangentielles $\tau_{xy} = \tau_{yx}$



Mise en évidence des efforts rasants.

Effort rasant

comparons les assemblages de sections carrées a x a



sections ❶ et ❷
$I_z = 2 \frac{a^4}{12}$ $\frac{I_z}{y_{\max}} = 2 \frac{a^3}{6}$

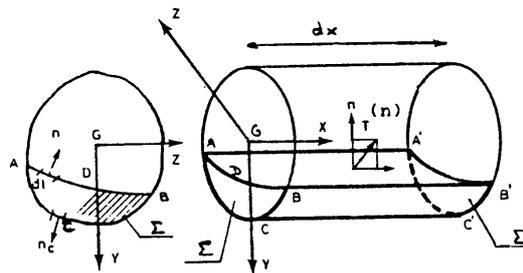
section ❸
$I_z = \frac{a(2a)^3}{12}$ $\frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{a(2a)^2}{6}$



❸ est 4x plus rigide

❸ est 2x plus résistant

Calcul de l'effort rasant



Équation d'équilibre de translation horizontale (en l'absence de forces de volume $f_x=0$)	$\oint_S T_x^{(n)} dS = 0$
--	----------------------------

$\int_{\Sigma} T_x^{(-x)} dS + \int_{\Sigma'} T_x^{(x)} dS + \int_{\text{coupe}} T_x^{(n)} dS + \int_{S_{\text{lat}}} T_x^{(n)} dS = 0$

Calcul de l'effort rasant

$$\int_{\Sigma} T_x^{(-x)} dS + \int_{\Sigma} T_x^{(x)} dS + \int_{\text{coupe}} T_x^{(n)} dS + \int_{S_{\text{lat}}} T_x^{(n)} dS \neq 0$$

$$\int_{\Sigma} [\sigma_x(x+dx) - \sigma_x x] dS + \int_{\text{coupe}} \tau_{nx} d\ell dx = 0 \quad =0, \text{ pas de force tangentielle en surface}$$

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dS + \int_{\text{coupe}} \tau_{nx} d\ell dx \neq 0 \quad \text{effort rasant}$$

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dS + \int_{AB} \tau_{nx} d\ell = 0$$

poutre prismatique

Calcul de l'effort rasant

Supposons que $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$ (hypothèse de Bernoulli)

Or,

D'où,

$$\frac{dM}{dx} = T_y \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{T_y}{I_z} y$$

$$\int_{AB} \tau_{nx} d\ell = -\frac{T_y}{I_z} \int_{\Sigma} y dS$$

$$\int_{AB} \tau_{nx} d\ell = -\frac{T_y}{I_z} S(\Sigma) \quad \text{moment statique de } \Sigma$$

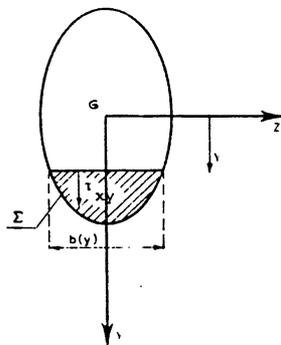
valeur moyenne $\tau_{nx} = -\frac{T_y}{I_z} \frac{S(\Sigma)}{\ell}$

Théorie de Jourawski

- récapitulation des hypothèses simplificatrices
 - $f_x = 0$
 - pas de force de surface tangentielle
 - poutre prismatique
 - Bernoulli
 - calcul de la contrainte *moyenne*

Cas particulier

- dans le cas où AB est parallèle à Oz



$$\tau_{nx} = -\tau_{yx}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y S(\Sigma)}{I_z b}$$

formule de
Jourawski

Centre géométrique et moment statique

- coordonnées du centre géométrique

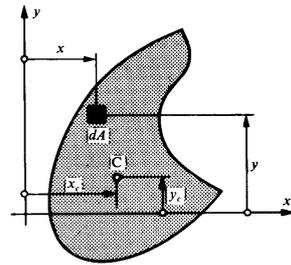
$$x_c = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

où apparaissent les
moments statiques

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$



Centre géométrique C(x_c, y_c) d'une figure plane.

Moment statique

- coordonnées du centre géométrique deviennent

$$x_c = \frac{S_y}{A}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A}$$

- conséquences

- le moment statique de A par rapport à un axe passant par le centre géométrique est nul
- le moment statique d'une surface d'aire Σ est égal au produit de l'aire Σ par la distance de son centre géométrique à l'axe

Autres contraintes dues à T_y

- contrainte normale σ_y

$$\sigma_y(y) = -\frac{qT_y(\Sigma)}{bT_y} \quad \text{toujours négligeable}$$

- contrainte tangentielle τ_{xz}

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

- montre que $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ ne dépend pas de $z \Rightarrow$ que τ_{xz} est linéaire en z

Sections massives

- moment statique

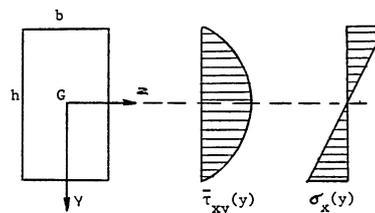
$$S(\Sigma) = \int_{-h/2}^{h/2} by dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$S(\Sigma) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \Sigma y_G$$

- calcul des contraintes

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{\max} = \frac{3 T_y}{2 A}$$

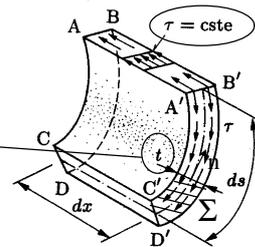


Structures à parois minces

- La formule de Jourawski

$$\bar{\tau}_{xn} \approx \tau_{xn} = -\frac{T_y S(\Sigma)}{I_z t}$$

donne une bonne précision
pour les parois minces



Contraintes τ rasantes et tranchantes.

- flux de cisaillement

effort rasant (N/m) $\textcircled{f} = \tau_{xn} t = -\frac{T_y S(\Sigma)}{I_z t} = -\frac{T_y}{I_z} \int_0^s y t ds$

Section à parois minces ouverte

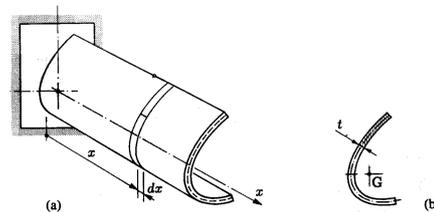
- Poutre prismatique à t variable

$$\bar{\tau}_{xn} = -\frac{T_y S(\Sigma)}{I_z t}$$

variable

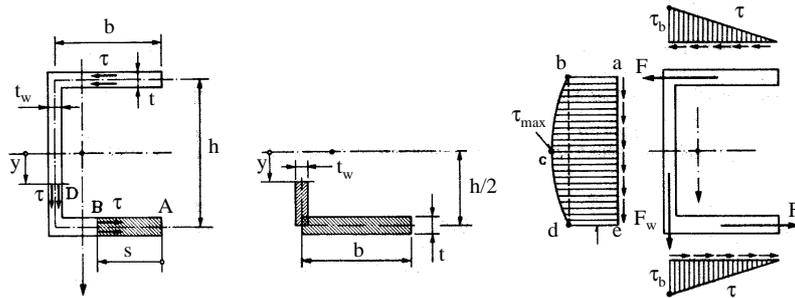
constant

τ_{xn} max. lorsque S/t max.



Poutre à paroi mince et à section ouverte : (a) vue ; (b) section droite ; $t = t(s)$
(et non pas $t = t(x, s)$: poutre prismatique !)

Section en U



Section en U

- contraintes dans les ailes

$$S(\Sigma) = \int_0^s y t ds = st \frac{h}{2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_y h}{2I_z} s$$

$$F_z = \frac{\tau_{xz} b t}{2} = \frac{T_y t b^2 h}{4I_z} \quad \begin{array}{l} \text{résultante} \\ \text{aile inférieure} \end{array}$$

Section en U

- contraintes dans l'âme

$$s(\Sigma) = \frac{tbh}{2} + t_w \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h/2 + y}{2} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{correction} \\ \text{négligeable} \end{array} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{bth}{2t_w} \right]$$

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{T_y h^2}{8I_z} + \frac{T_y bth}{2I_z t_w}$$

$$F_w = \frac{T_y}{I_z} \left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bth^2}{2} \right)$$

Section en U

- inertie en flexion

$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bth^2}{2} + 2 \frac{bt^3}{12} \quad \text{négligeable}$$

- conclusion :

$$F_w = T_y$$

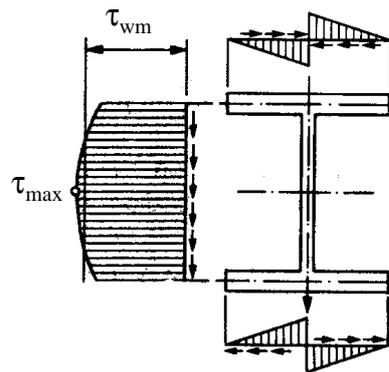
- solution approchée

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A_w}$$

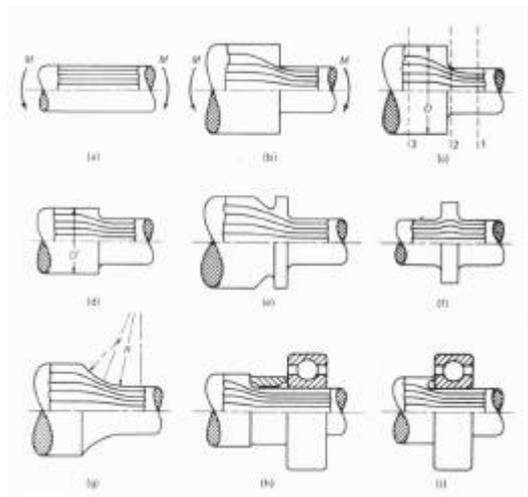
Section en I

- contraintes tangentielles dans l'âme

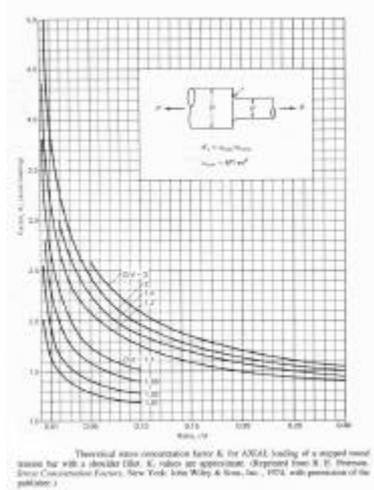
$$\tau_{wm} \approx \frac{T_y}{A_w}$$



Facteurs de concentration de contraintes



Facteurs de concentration de contraintes

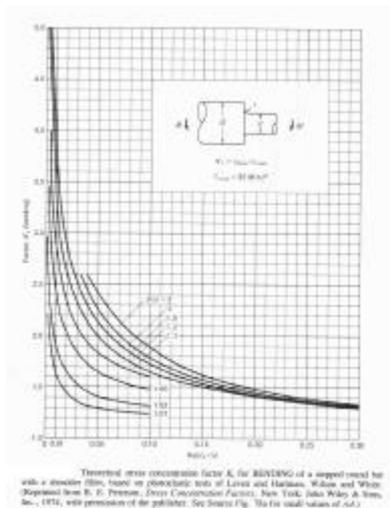


sous effort normal

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Facteurs de concentration de contraintes



sous moment fléchissant

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

Section à parois minces fermée

- poutres tubulaires ou caissons
- la théorie de Jourawski ne s'applique pas aisément car on ne dispose plus d'un endroit où le flux de cisaillement a une valeur connue *a priori*

Déformation due à l'effort tranchant

- l'hypothèse de Bernoulli pas rigoureusement satisfaite

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

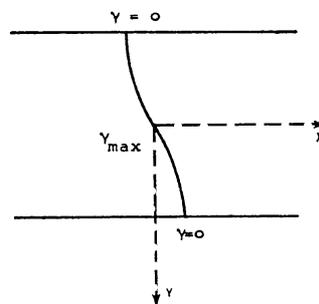
τ_{xy} pas uniforme



les sections gauchissent



hypothèse de Bernoulli
généralisé



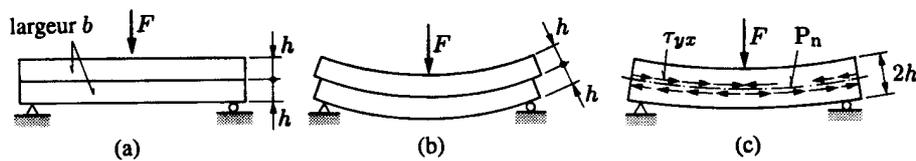
7 - Flexion simple (cisaillement)

Flexion simple

- $M \neq 0$ et $T \neq 0$
- la relation $\sigma_x = \frac{My}{I_z}$ reste valable car
 - l'effort tranchant perturbe peu les contraintes normales
 - la courbure est également peu sensible à l'effort tranchant
- l'effort tranchant est la résultante des contraintes de cisaillement $T_y = \int_A \tau_{xy} dA$

Calcul des contraintes de cisaillement

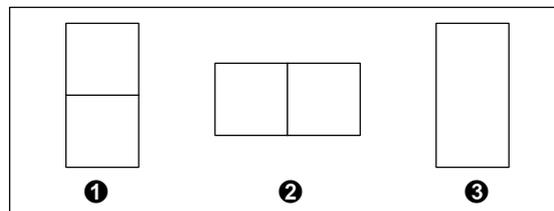
- théorie de Jourawski
- calcul de l'effort rasant car réciprocity des contraintes tangentielles $\tau_{xy} = \tau_{yx}$



Mise en évidence des efforts rasants.

Effort rasant

comparons les assemblages de sections carrées $a \times a$



sections ① et ②

$$I_z = 2 \frac{a^4}{12}$$

$$\overline{I_z} = 2 \frac{a^3}{12}$$

section ③

$$I_z = \frac{a(2a)^3}{12}$$

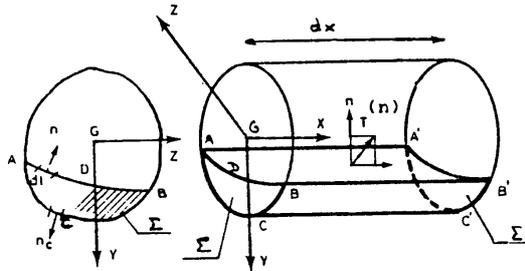
$$\overline{I_z} = \frac{a(2a)^2}{12}$$



③ est 4x plus rigide

③ est 2x plus résistant

Calcul de l'effort rasant



Équation d'équilibre de translation horizontale
(en l'absence de forces de volume $f_x=0$) $\oint_S T_x^{(n)} dS = 0$

$$\int_{\Sigma} T_x^{(-x)} dS + \int_{\Sigma'} T_x^{(x)} dS + \int_{\text{coupe}} T_x^{(n)} dS + \int_{S_{\text{lat}}} T_x^{(n)} dS = 0$$

Calcul de l'effort rasant

poutre prismatique

$$\int_{\Sigma} T_x^{(-x)} dS + \int_{\Sigma'} T_x^{(x)} dS + \int_{\text{coupe}} T_x^{(n)} dS + \int_{S_{\text{lat}}} T_x^{(n)} dS \neq 0$$

=0, pas de force tangentielle en surface

$$\int_{\Sigma} [\sigma_x(x+dx) - \sigma_x x] dS + \int_{\text{coupe}} \tau_{nx} d\ell dx = 0$$

effort rasant

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dS + \int_{\text{coupe}} \tau_{nx} d\ell dx \neq 0$$

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dS + \int_{AB} \tau_{nx} d\ell = 0$$

Calcul de l'effort rasant

Supposons que $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$ (hypothèse de Bernoulli)

Or,

$$\frac{dM}{dx} = T_y \Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{T_y}{I_z} y$$

D'où,

$$\int_{AB} \tau_{nx} d\ell = -\frac{T_y}{I_z} \int_{\Sigma} y dS$$

$$\int_{AB} \tau_{nx} d\ell = -\frac{T_y}{I_z} S(\Sigma) \text{ moment statique de } \Sigma$$

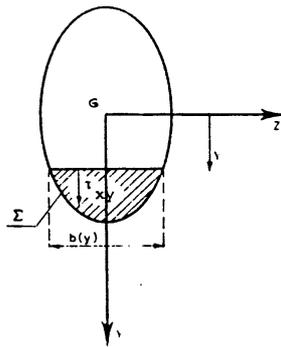
valeur moyenne $\tau_{nx} = -\frac{T_y}{I_z} \frac{S(\Sigma)}{\ell}$

Théorie de Jourawski

- récapitulation des hypothèses simplificatrices
 - $f_x = 0$
 - pas de force de surface tangentielle
 - poutre prismatique
 - Bernoulli
 - calcul de la contrainte *moyenne*

Cas particulier

- dans le cas où AB est parallèle à Oz



$$\tau_{nx} = -\tau_{yx}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y S(\Sigma)}{I_z b}$$

formule de Jourawski

Centre géométrique et moment statique

- coordonnées du centre géométrique

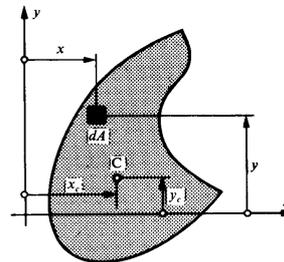
$$x_c = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

où apparaissent les moments statiques

$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$



Centre géométrique $C(x_c, y_c)$ d'une figure plane.

Moment statique

- coordonnées du centre géométrique deviennent

$$x_c = \frac{S_y}{A}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A}$$

- conséquences

- le moment statique de A par rapport à un axe passant par le centre géométrique est nul
- le moment statique d'une surface d'aire Σ est égal au produit de l'aire Σ par la distance de son centre géométrique à l'axe

Autres contraintes dues à T_y

- contrainte normale σ_y

$$\sigma_y(y) = -\frac{qT_y(\Sigma)}{bT_y}$$

toujours négligeable

- contrainte tangentielle τ_{xz}

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

- montre que $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ ne dépend pas de $z \Rightarrow$ que τ_{xz} est linéaire en z

Sections massives

- moment statique

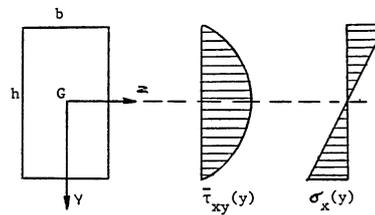
$$S(\Sigma) = \int_y^{h/2} b y dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$S(\Sigma) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \Sigma y_G$$

- calcul des contraintes

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{T_y}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy}^{\max} = \frac{3 T_y}{2 A}$$

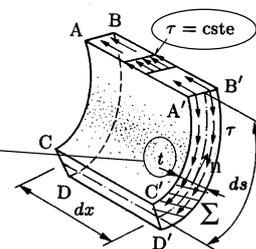


Structures à parois minces

- La formule de Jourawski

$$\bar{\tau}_{xn} \approx \tau_{xn} = - \frac{T_y S(\Sigma)}{I_z \textcircled{t}}$$

donne une bonne précision
pour les parois minces



Contraintes τ rasantes et tranchantes

- flux de cisaillement

effort rasant (N/m) $\textcircled{f} = \tau_{xn} t = - \frac{T_y S(\Sigma)}{I_z t} = - \frac{T_y}{I_z} \int_0^s y t ds$

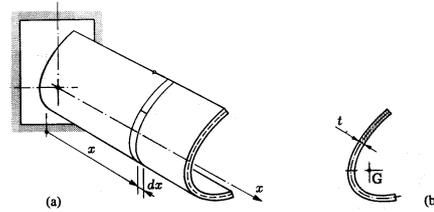
Section à parois minces ouverte

- Poutre prismatique à t variable

$$\bar{\tau}_{xn} = - \frac{T_y S(\Sigma)}{I_z t}$$

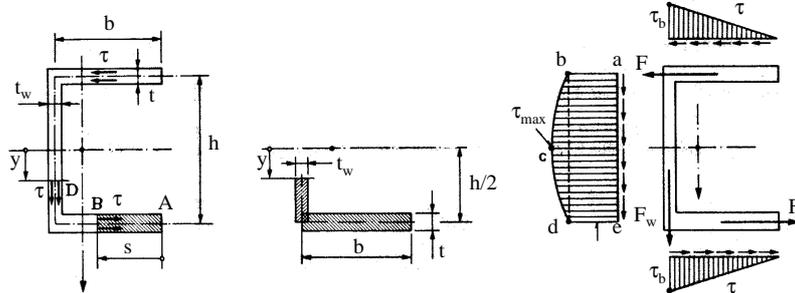
constant

τ_{xn} max. lorsque S/t max.



Poutre à paroi mince et à section ouverte : (a) vue ; (b) section droite ; $t = t(s)$
(et non pas $t = t(x, s)$: poutre prismatique !)

Section en U



Section en U

- contraintes dans les ailes

$$S(\Sigma) = \int_0^s y t ds = st \frac{h}{2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{T_y h}{2I_z} s$$

$$F_z = \frac{\tau_{xz} bt}{2} = \frac{T_y t b^2 h}{4I_z} \quad \begin{array}{l} \text{résultante} \\ \text{aile inférieure} \end{array}$$

Section en U

- contraintes dans l'âme

$$S(\Sigma) = \frac{tbh}{2} + t_w \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h/2 + y}{2} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{correction} \\ \text{négligeable} \end{array} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{I_z} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \frac{bth}{2t_w} \right]$$

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{T_y h^2}{8I_z} + \frac{T_y bth}{2I_z t_w}$$

$$F_w = \frac{T_y}{I_z} \left(\frac{t_w h^3}{12} + \frac{bth^2}{2} \right)$$

Section en U

- inertie en flexion

$$I_z = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{b h^2}{2} + 2 \frac{b t^3}{12}$$

négligeable

- conclusion :

$$F_w = T_y$$

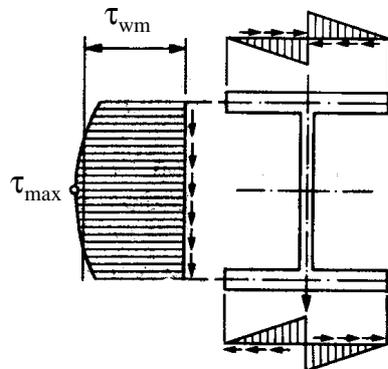
- solution approchée

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{A_w}$$

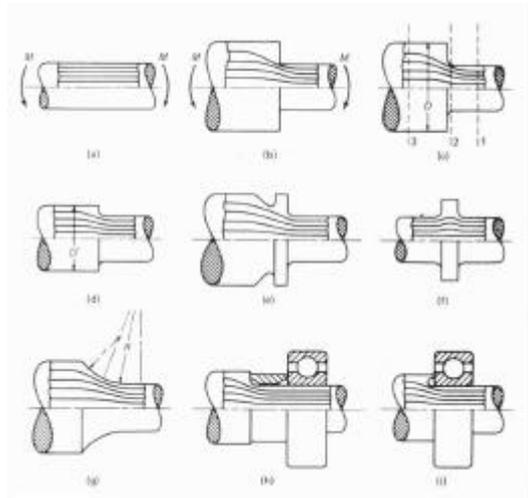
Section en I

- contraintes tangentielles dans l'âme

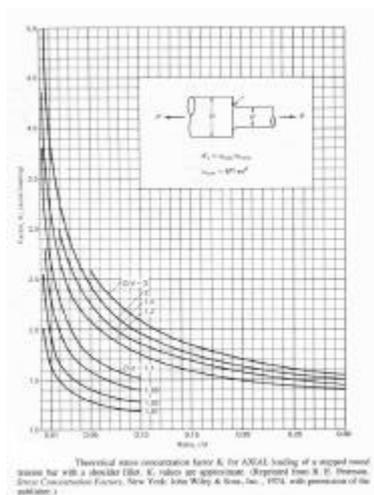
$$\tau_{wm} \approx \frac{T_y}{A_w}$$



Facteurs de concentration de contraintes



Facteurs de concentration de contraintes

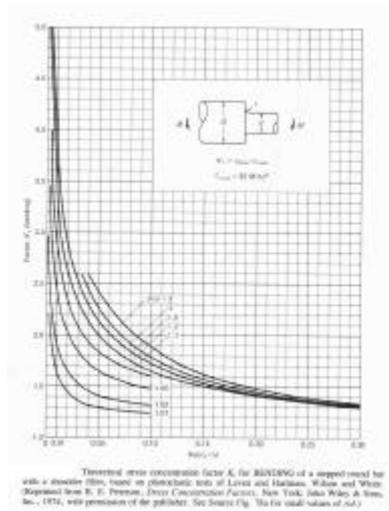


sous effort normal

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Facteurs de concentration de contraintes



sous moment fléchissant

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}$$

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{32M}{\pi d^3}$$

Section à parois minces fermée

- poutres tubulaires ou caissons
- la théorie de Jourawski ne s'applique pas aisément car on ne dispose plus d'un endroit où le flux de cisaillement a une valeur connue *a priori*

Déformation due à l'effort tranchant

- l'hypothèse de Bernoulli pas rigoureusement satisfaite

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \text{avec } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

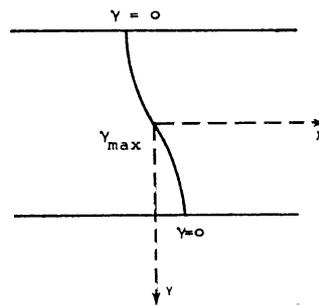
τ_{xy} pas uniforme



les sections gauchissent



hypothèse de Bernoulli
généralisé



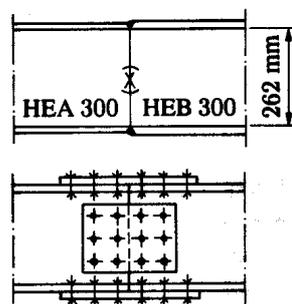
Assemblages

- définition : jonction de 2 (ou +) pièces
- moyens d'assemblage :
 - boulons
 - clous
 - cordons de soudure
 - colles
 - chevilles
 - ...
 - anneaux
 - goujons
 - clavettes
 - rivets
 - axes

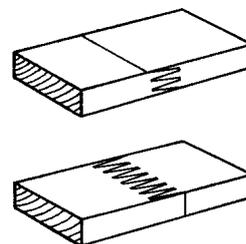
Assemblages

- assemblages longitudinaux
 - section droite monolithique
- assemblages transversaux (joints)
 - prolongement d'une poutre suivant son axe
- nœuds
 - solidarisent 2 (ou +) pièces dont les axes n'ont pas la même direction

Joints



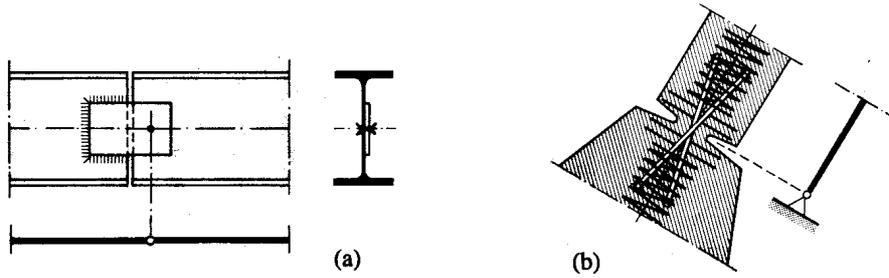
(a)



(b)

Joints : (a) acier (joint soudé et joint boulonné); (b) bois (joint par entures collées).

Articulations



Articulations : (a) acier ; (b) béton.

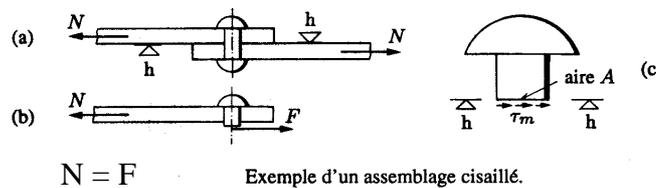
Assemblages

- objectifs
 - réaliser la transmission
 - des forces (actions, réactions d'appui)
 - des efforts intérieurs (N, T, M)
 - des contraintes
 - être
 - techniquement simple
 - peu encombrant
 - facile à réaliser et à entretenir
 - durable dans le temps

Calcul des assemblages

- analyse théoriquement très complexe
- essais en laboratoires E.L.U.
- assemblages standardisés
- cisaillement direct et rupture des assemblages
- calcul des assemblages longitudinaux

Cisaillement direct



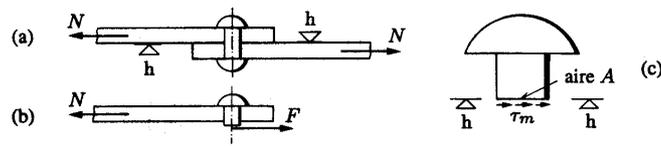
– ne peut être modélisé par une poutre

$$\int_A \tau_m dA = F$$

– la notion d'effort intérieur n'a pas de sens (Saint-Venant)

– pas état de cisaillement pur

Cisaillement direct : calculs pratiques



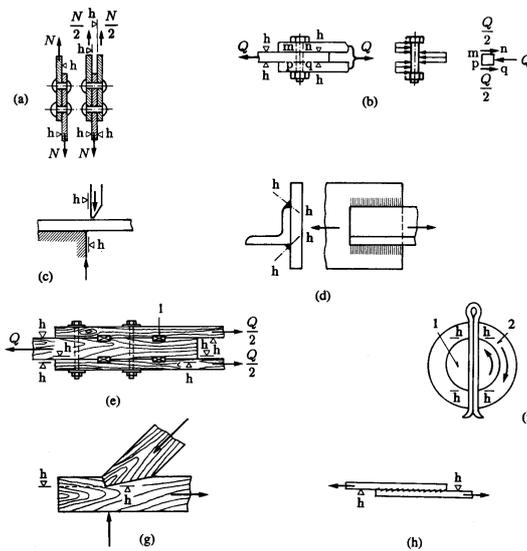
$$N = F$$

Exemple d'un assemblage cisailé.

$$\tau_m = \frac{F}{A} \leq \tau_{adm}$$

– τ_{adm} est déterminé par des essais

exemples



Cisaillement direct de divers assemblages dans le(s) plan(s) hh :

(a) rivets en simple et double cisaillement ; (b) boulon ou axe ; (c) tôle coupée à la cisaille ; (d) cordons de soudure ; (e) assemblage en bois (1 : clavette ou clé) ; (f) goupille (1 : axe ; 2 : cylindre) ; (g) emboîtement ; (h) pièces collées.

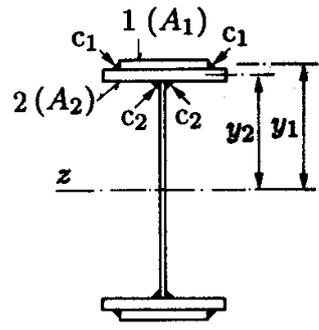
Assemblages longitudinaux

- calcul du flux de cisaillement $f = T S / I_z$

$$R_1 = \frac{TS_1}{I_z}$$

$$S_1 = A_1 y_1$$

$$F_1 = \frac{R_1}{2}$$



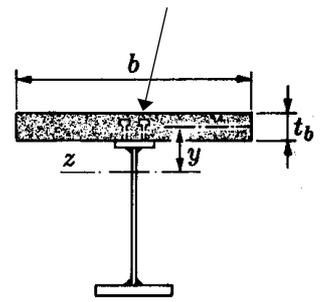
$$R_2 = \frac{TS_2}{I_z}$$

$$S_2 = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

$$F_2 = \frac{R_2}{2}$$

Assemblages longitudinaux

2 rangées, espacement s



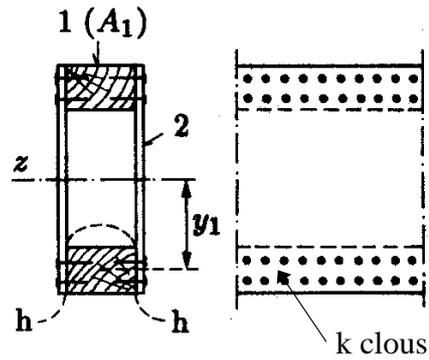
$$R = \frac{T \tilde{S}_a}{\tilde{I}_a}$$

$$\tilde{S}_a = b \tilde{t}_a y$$

$$\tilde{t}_a = \frac{t_b}{n}$$

$$F = s \frac{R}{2}$$

Assemblages longitudinaux



$$R = \frac{TS_1}{\tilde{I}_{z_1}}$$

$$S_1 = A_1 y_1$$

$$F = \frac{R}{k}$$

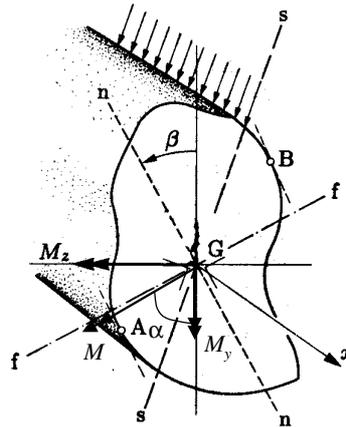
8 - Flexion gauche (oblique)

Flexion gauche (oblique)

- définition

$$M_y + M_z$$

$$(T_z + T_y)$$



Convention de signe

- M_z positif si fibres tendues du côté $y > 0$

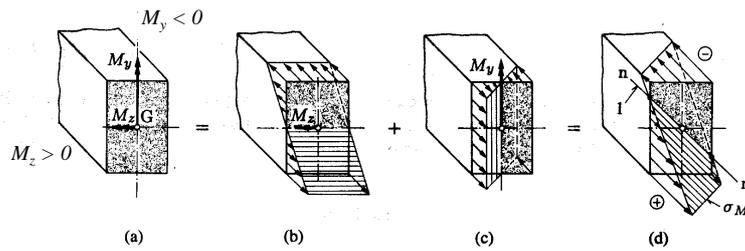
M_y positif si fibres tendues du côté $z > 0$

- T_y positif si partie de droite descend ($y > 0$)

T_z positif si partie de droite descend ($z > 0$)

Flexion oblique (axes principaux)

- superposition $M_y = - M \cos \alpha$ et $M_z = M \sin \alpha$

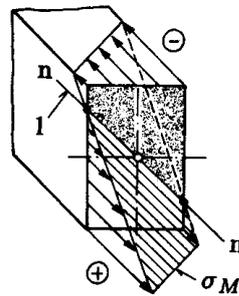


Superposition des contraintes en flexion oblique : (a) M_y et M_z ; (b) σ_{M_x}
 (c) σ_{M_y} ; (d) $\sigma_M = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y}$ (I : axe neutre n-n).

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Axe neutre

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ -\frac{M \cos \alpha}{I_z} y + \frac{M \sin \alpha}{I_y} z &= 0 \\ z &= y \frac{I_y}{I_z} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$



Flexion gauche (axes quelconques)

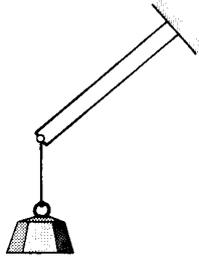
- superposition dans n'importe quels axes
 - mais $I_{yz} \neq 0$
- contraintes tangentielles :
théorie de Jourawski généralisée

$$\tau_{nx} = -\frac{T_y}{I_z} \frac{S(\Sigma, z)}{\ell} - \frac{T_z}{I_y} \frac{S(\Sigma, y)}{\ell}$$

9 - Flexion composée

Flexion composée

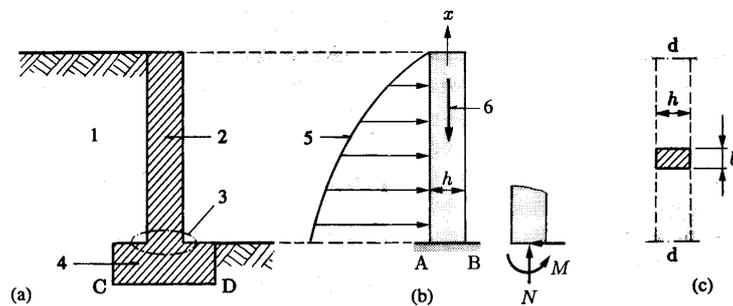
- définition



Flexion composée.

- superposition $N + M$

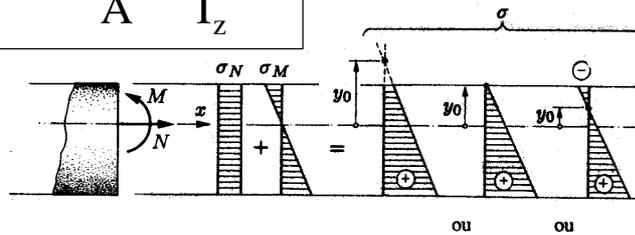
Exemple : mur de soutènement



Mur de soutènement : (a) coupe (1 : terrain ; 2 : mur ; 3 : base ; 4 : fondation) ; (b) charges (5 : diagramme de la poussée des terres ; 6 : poids) ; (c) tranche (vue en plan d'une coupe horizontale ; le mur est admis très long dans la direction d-d).

Flexion composée

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y$$



Superposition des contraintes normales en flexion composée.

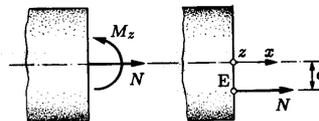
position de l'axe neutre

$$y_0 = -\frac{N I_z}{M A}$$

Noyau central

- sollicitation équivalente par effort normal excentré

$$M_z = N e$$

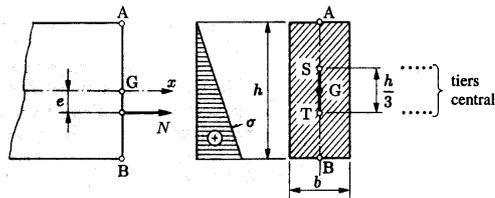


- position de l'axe neutre

$$y_0 = -\frac{I_z}{e A}$$

- noyau central : position limite du changement de signe de σ dans la section

Section rectangulaire



Tiers central d'une section rectangulaire.

$$y_0 = \pm \frac{h}{2}$$

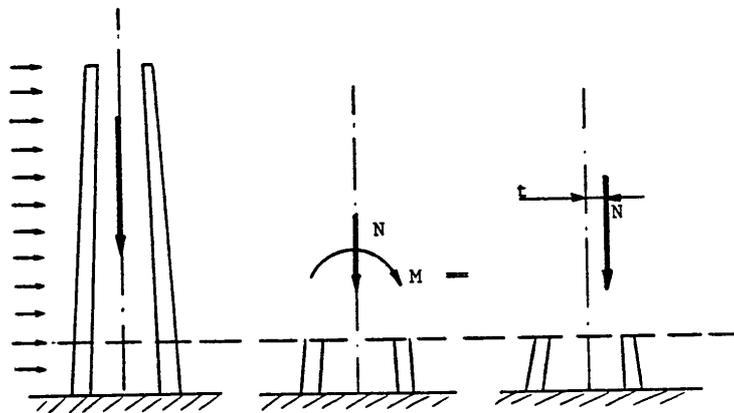
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$A = bh$$

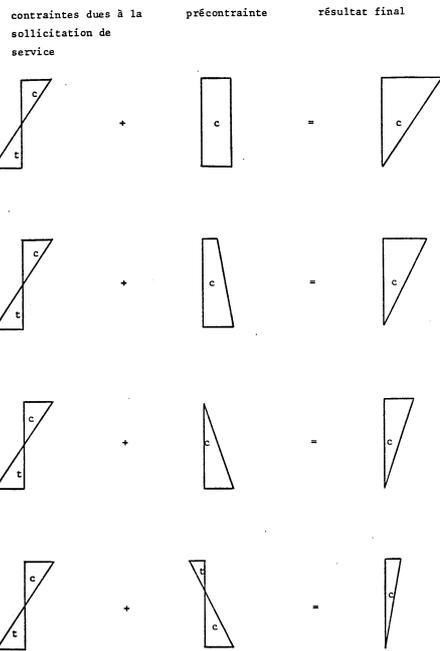
⇓

$$e = \pm \frac{h}{6}$$

Exemple : cheminée



*Exemple :
béton précontraint*

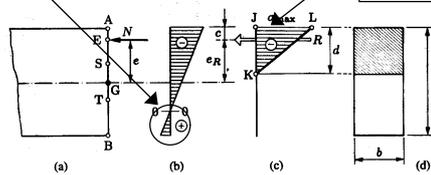


Matériaux sans résistance à traction

pas de résistance en traction

diagramme équivalent

$$\begin{aligned} N &= R \\ M &= Re_R \Rightarrow e_R = \frac{M}{N} \end{aligned}$$



Résistance d'une section fissurée à la compression excentrée : (a) élévation avec effort normal excentré ; (b) diagramme des contraintes, matériau non fissuré ; (c) diagramme des contraintes, matériau fissuré ; (d) zone comprimée (hachurée) de la section droite.

$$R = bd \frac{\sigma_{\max}}{2} = b3c \frac{\sigma_{\max}}{2} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{2N}{3bc}$$

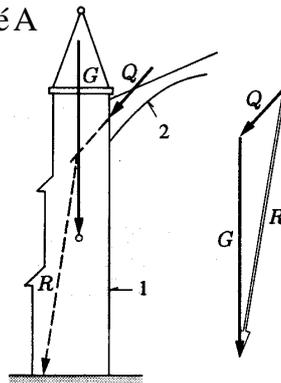
Exemple : contreforts

$N \rightarrow$ bord comprimé A

$$c \rightarrow 0$$



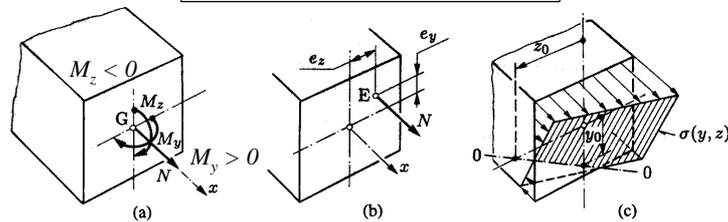
$$\sigma_{\max} \rightarrow \infty$$



Le poids G du contrefort 1 s'oppose au moment de la poussée Q de l'arc-boutant 2.

Flexion composée oblique

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$



Flexion composée oblique

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_z} y + \frac{N e_z}{I_y} z$$

Noyau central

- l'axe neutre a pour équation

$$\frac{N}{A} + \frac{Ne_y}{I_z} y + \frac{Ne_z}{I_y} z = 0$$

- la distance de E à l'axe neutre vaut

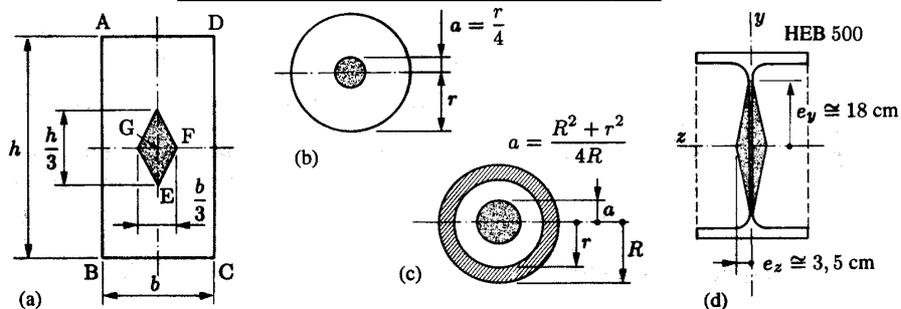
$$d = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{e_y}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{I_y}\right)^2}$$

- remarque

– si $E \rightarrow G$, e_y et $e_z \rightarrow 0 \Rightarrow d \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_x = N/A$

Noyau central : sections simples

$$A = \pi r^2; I = \frac{\pi r^4}{4}; d = r \text{ et } d = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{r}{I}\right)^2}$$



Noyau central de quelques sections droites :
(a) rectangle; (b) cercle; (c) couronne; (d) section en I (HEB 500).

Torsion uniforme

- définition

- torsion uniforme (pure, de Saint-Venant)

$$M_x = \text{constante}$$

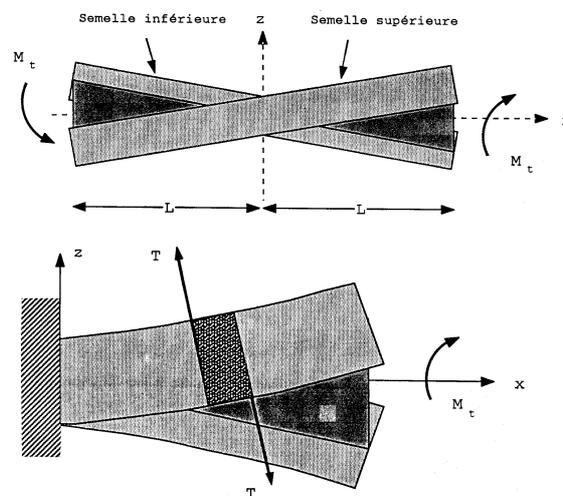
- gauchissement libre (non entravé)

- seules contraintes τ_{xy} , τ_{xz}

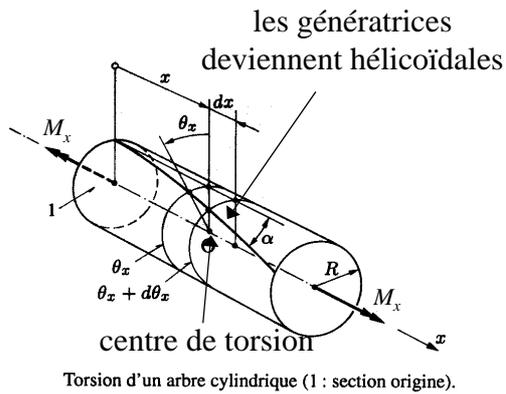
- arbre cylindrique : symétrie de révolution

- les sections planes restent planes
- les angles au centre sont conservés

Torsion libre vs. entravée



Torsion d'un arbre cylindrique



$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

$$\cos\alpha \approx 1$$

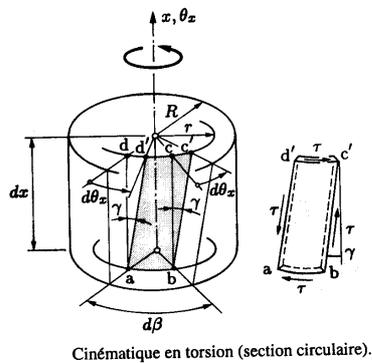
$$dx' = \frac{dx}{\cos\alpha} \approx dx$$

$$\varepsilon_x \approx 0$$

$$\sigma_x \approx 0$$

Torsion d'un arbre cylindrique

- cinématique



abcd devient a' b' c' d'
= abc' d'

$$\left. \begin{array}{l} cc' = dd' = r d\theta_x \\ cc' = dd' = \gamma_{r\theta} dx \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{r\theta} = r \frac{d\theta_x}{dx}$$

Loi constitutive

- état de cisaillement pur
 - $\tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}$ (loi de Hooke)
- \Rightarrow loi constitutive en torsion

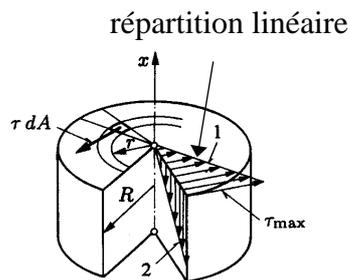
$$\tau_{r\theta} = Gr \frac{d\theta_x}{dx}$$

- généralisation

$$M_x = GJ \frac{d\theta_x}{dx}$$

$J =$ constante de torsion (m^4)

Poutres à section circulaire



Contraintes tangentielles τ d'une section circulaire (1 : τ agissant sur la section droite ; 2 : τ agissant longitudinalement entre les fibres, par réciprocité).

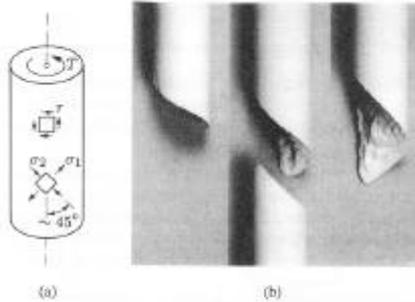
$$\tau_{\max} = \frac{M_x R}{I_p}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= Gr \frac{d\theta_x}{dx} \\ M_x &= \int_A \tau_{r\theta} r dA \\ &= G \frac{d\theta_x}{dx} \int_A r^2 dA \\ &= G \frac{d\theta_x}{dx} I_p \end{aligned}$$

inertie polaire
 $\pi R^4/2$

Poutres à section circulaire

- applicable aux sections circulaires
 - pleines
 - ou creuses



Rupture pie torsion dans un matériau raide :
 (a) contraintes principales ;
 (b) rupture d'une crête (photo A. Herzog).

Essai de torsion

- angle de torsion total

$$\theta_x = \frac{d\theta_x}{dx} L = \frac{M_x L}{GJ} = \frac{2M_x L}{\pi G R^4}$$

- essai de torsion

$$G = \frac{2M_x L}{\pi \theta_x R^4}$$

- coefficient de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu$$

Sécurité des pièces tordues

- matériaux ductiles

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} \quad (\text{cf. Von Mises})$$

- critère déterministe

$$\tau \leq \tau_{\text{adm}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{\sqrt{3}}$$

- E.L.U.

$$\sqrt{3}\tau_d \leq \tau_{\text{dim}}$$

Sécurité des pièces tordues

- matériaux fragiles

- critère déterministe

$$\tau \leq \tau_{\text{adm}} = \frac{\tau_u}{\gamma}$$

- E.L.U.

$$\tau_d \leq \tau_{u \text{ dim}}$$

Autres sections

- pas de solution analytique \Rightarrow solution approchée
- sections elliptiques
 - solution de Saint-Venant

$$\boxed{J \approx \frac{A^4}{40I_p}} \quad \text{avec} \quad \boxed{I_p = (a^2 + b^2)\frac{A}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{A = \pi ab}$$

- analogie hydrodynamique

Sections massives

- section rectangulaire

$$\boxed{\tau_B = \frac{M_x}{\beta bc^2}} \quad \begin{array}{c} b \\ \tau_{\max} \quad A \\ \text{B} \\ c \end{array} \quad \boxed{\tau_{\max} = \tau_A = \frac{M_x}{\alpha bc^2}}$$

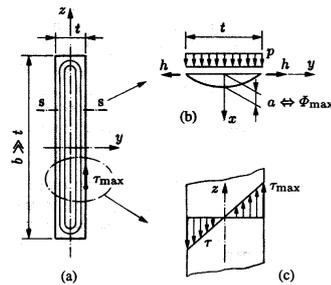
Contraintes tangentielles de torsion dans une section rectangulaire.

$$\boxed{J = \gamma bc^3}$$

$$\boxed{\alpha, \beta, \gamma = \text{fct}\left(\frac{b}{c}\right)}$$

Section ouverte à parois minces

- analogie de la membrane



$$M_x = G \frac{d\theta_x}{dx} \frac{bt^3}{3}$$
$$\tau_{max} = \frac{3M_x}{bt^2}$$

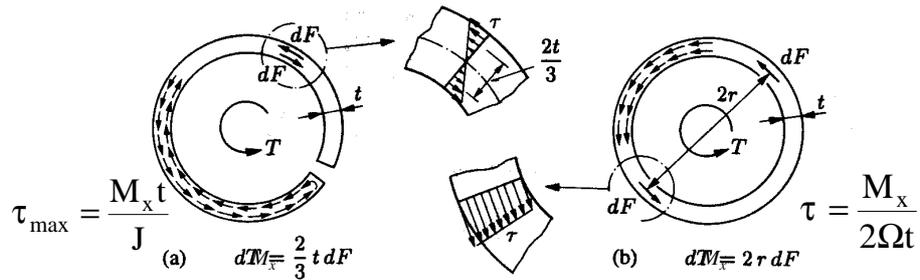
Torsion d'une poutre à section rectangulaire mince : (a) section droite et lignes de cisaillement ; (b) coupe ss de la membrane ; (c) diagramme des contraintes à travers l'épaisseur t .

Section ouverte à parois minces

- remarques
 - id. solution section massive avec $b/c \rightarrow \infty$
 - bonne approximation lorsque $b/t \geq 10$
 - concentration de contraintes dans les angles rentrants
 - \Rightarrow congés de raccordement
 - $\Rightarrow J$ augmente

Section fermée à parois minces

- analogie de l'hydrodynamique

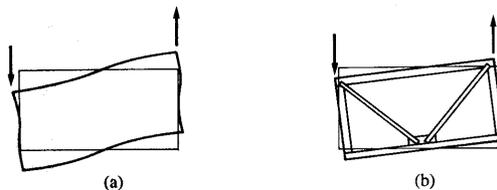


Circulation des contraintes tangentielles de torsion : (a) section ouverte ; (b) section fermée.

$$M_x^{\text{fermé}} \gg M_x^{\text{ouvert}}$$

Forme rationnelle des sections droites

- sections fermées
- augmenter l'aire sectorielle
- risque d'instabilités
 - prévoir des diaphragmes ou des raidisseurs



Déplacement de la section droite : (a) sans diaphragme, d'où distorsion ;
(b) avec diaphragme (en treillis), d'où rotation en bloc.

Synthèse calcul élastique des poutres

- pour chaque cas de sollicitation, identifiez les critères de
 - résistance : contraintes, module de résistance
 - déformabilité : déplacements, module de rigidité
- et les risques d'instabilité

11 - Calcul des déplacements

Calcul des déplacements

- motivation
 - États Limites de Service (ELS)
 - limiter la déformabilité (les déplacements) des structures
 - souvent, critère plus exigeant que celui de résistance
 - structures hyperstatiques
 - détermination des inconnues hyperstatiques

Déformée due à la flexion

- flexion simple plane
- axe initialement rectiligne, actions perpendiculaires
- petits déplacements (linéarisation géométrique)
- effets de M et de T dissociés
- on cherche l'équation de la déformée de l'axe
= ligne élastique

Ligne élastique

• On a :

$$\frac{1}{R_y} = -\frac{M}{EI_z}$$

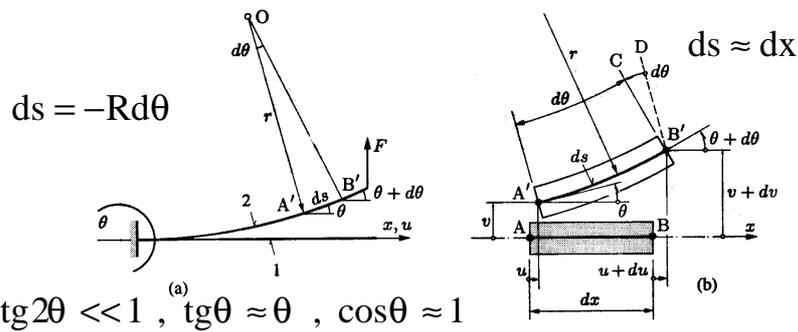
• Or,

$$\frac{1}{R_y} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx y''$$

$$y'' = -\frac{M}{EI}$$

linéarisation
géométrique

Flèche et rotation



Déplacements en flexion (M seul) : (a) déformée d'ensemble (1 : axe en configuration initiale; 2 : déformée); (b) déformée de l'élément AB.

$$dx + u + du = u + ds \cos\theta \approx u + dx \Rightarrow du \approx 0$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

Équations différentielles des poutres fléchies

$$EIy'' = -M$$

$$(EIy'')' = -T \quad \text{car } T = \frac{dM}{dx}$$

$$(EIy''')' = q \quad \text{car } q = -\frac{dT}{dx}$$

Cas particulier : EI constant

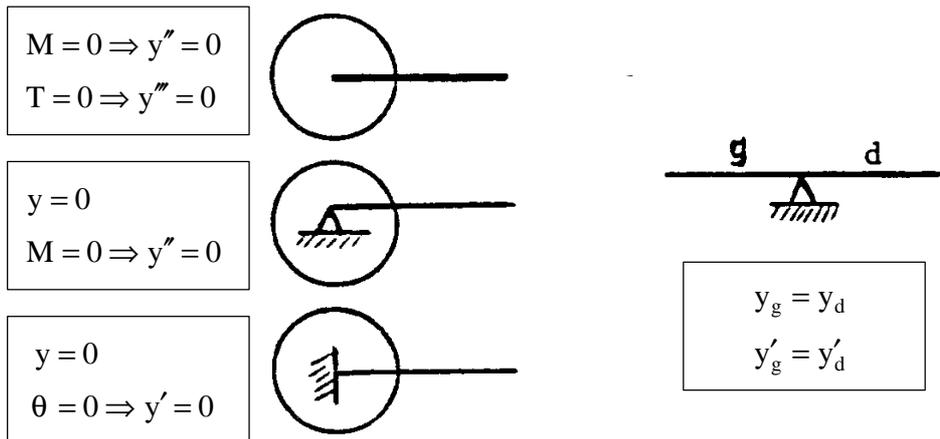
$$y^{(4)} = \frac{q}{EI}$$

équation différentielle du
4^{ème} ordre

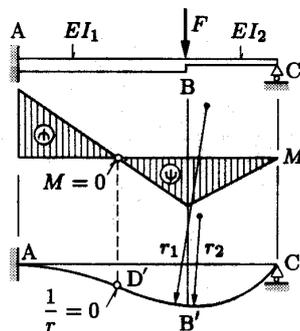
Conditions aux limites

- conditions sur y
 - flèche imposée (appuis)
- conditions sur y'
 - rotation imposée (encastrement)
- conditions sur y''
 - moment fléchissant imposé (extrémité libre)
- conditions sur y'''
 - effort tranchant imposé (extrémité libre)

Conditions aux limites

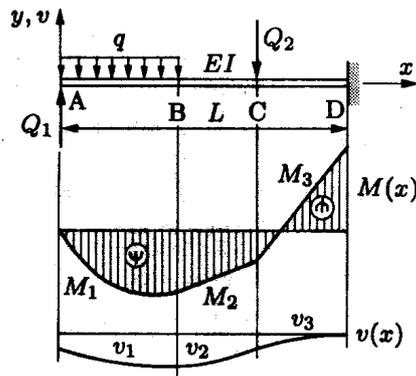


Intégration directe



Déformées cubiques; inflexion; discontinuité de la courbure (AB' et $B'C$: arcs de cubique;
 D' : point d'inflexion; B' : point de discontinuité).

Intégration directe



Déformée par intégration et conditions aux limites ($EI = \text{cste}$).

Intégration directe

- avantage
 - on trouve $y(x)$ en tout point
- inconvénient
 - en général, on cherche y et θ en quelques points
 - \rightarrow trouver une méthode de calcul plus adaptée

Remarques (1)

- cas de la flexion pure
 - $M = \text{cste} \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y$ est une parabole
 - $1/R = -M/EI \Rightarrow y$ est un cercle
 - l'approximation vient de
$$\frac{1}{R_y} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx y''$$
 - valable uniquement si les déplacements sont petits

Remarques (2)

- grands déplacements
 - le principe de superposition n'est **plus** valable
 - les sollicitations dépendent de la configuration **déformée**

Théorème des travaux virtuels

- T.V. : forces **réelles** - déplacements **virtuels**

$$\int_V f_i u'_i dV + \oint_S T_i^{(n)} u'_i dS = \int_V \tau_{ij} a'_{ij} dV \quad \forall u'_i$$

- T.V. : forces **virtuelles** - déplacements **réels**

$$\int_V f'_i u_i dV + \oint_S T_i^{(n)} u_i dS = \int_V \tau'_{ij} a_{ij} dV$$

$\forall f'_i, T_i^{(n)}, \tau'_{ij}$ en équilibre

Intégrales de Mohr



- choisir les forces et les contraintes virtuelles en équilibre en plaçant une force **unitaire** dans le **sens** du déplacement cherché

$$\int_V f'_i u_i dV + \oint_S T_i^{(n)} u_i dS = 1 \delta$$

- δ = déplacement cherché

Contribution de M

$$\begin{aligned}\int_V \tau'_{ij} a_{ij} dV &= \int_V \frac{M'y}{I} \frac{My}{EI} dV \\ &= \int_\ell \frac{MM'}{EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx \\ &= \int_\ell \frac{MM'}{EI} dx\end{aligned}$$

Contribution de N

$$\begin{aligned}\int_V \tau'_{ij} a_{ij} dV &= \int_V \frac{N'}{A} \frac{N}{EA} dV \\ &= \int_\ell \frac{NN'}{EA^2} \left(\int_A dA \right) dx \\ &= \int_\ell \frac{NN'}{EA} dx\end{aligned}$$

Contribution de T

$$\begin{aligned}
 \int_V \tau'_{ij} a_{ij} dV &= \int_V \frac{T'S}{Ib} \frac{TS}{GIb} dV && \chi = \text{facteur de correction} \\
 &= \int_\ell \frac{TT'}{GA} \left(\frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA \right) dx \\
 &= \int_\ell \chi \frac{TT'}{GA} dx
 \end{aligned}$$

Intégrale de Mohr

$$\delta = \int_\ell \left(\frac{MM'}{EI} + \frac{NN'}{EA} + \chi \frac{TT'}{GA} \right) dx$$

moment fléchissant dû
aux actions réelles

moment fléchissant dû à une force
unitaire placée au point où l'on
cherche le déplacement dans la
direction et le sens de celui-ci

En général,

$$\delta = \int_\ell \left(\frac{MM'}{EI} \right) dx$$

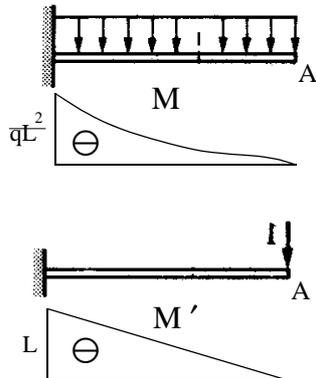
Calculs pratiques

Tableau de

$$\frac{1}{l} \int M' M'' dx$$

M'	M_1	M_2	M_3	M_4
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{M_3}{6} (3M_1 + M_2)$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_4}{6} (M_1 + 3M_2)$	$\frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} M_2 M_4$
	$\frac{M_1}{6} (2M_3 + M_4)$	$\frac{1}{6} M_1 M_3 + \frac{1}{3} M_2 M_4 + \frac{1}{6} M_1 M_4 + \frac{1}{6} M_2 M_3$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3 + \frac{1+a}{6} M_2 M_4$	$\frac{1}{3} (M_3 + M_4) M_1$
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3 + \frac{1+a}{6} M_2 M_3$	$\frac{1}{6} (1 - \frac{(2-a)^2}{6K}) M_1 M_3$ Si : a < b; K = b(1-a) Si : a > b; K = a(1-b)	$\frac{1+a-b}{3} M_1 M_3$
	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\frac{2}{6} [(2-b)M_1 + 3M_2] M_3$	$\frac{2b-a}{6} \frac{(2-a)^2(1-b)}{K} M_1 M_3$ Pour K, voir ci-dessus	$\frac{b^2(2-b)}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1-3(1-b)^2}{6} M_1 M_3$	$\frac{1-3(1-b)^2}{6} M_1 M_3 - \frac{1-a}{6} \frac{3b^2}{a^2} M_2 M_3$	Si : a < b $\frac{11+a-3(1-b)^2}{6} M_1 M_3$ Si : a > b $-\frac{(2-a-3\frac{b^2}{a^2})}{6} M_1 M_3$	$\frac{6b^2-4b^3-1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1+a-a^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{8}{15} M_1 M_3$
	$\frac{1}{4} M_1 M_3$	$\frac{1}{12} (3M_1 + M_2) M_3$	$\frac{3-3a+a^2}{12} M_1 M_3$	$\frac{1}{5} M_1 M_3$
	$\frac{1}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) M_4$	$\frac{1+a-a^2}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{5} M_1 M_4$

Exemple



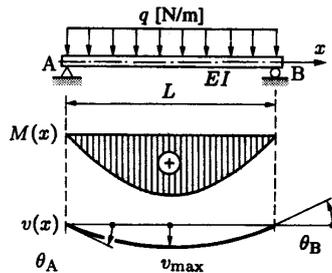
flèche en A

$$\delta = \frac{L}{EI} \frac{1}{4} \frac{qL^2}{2} L = \frac{qL^4}{8EI}$$

rotation en A

$$\delta = -\frac{L}{EI} \frac{1}{3} \frac{qL^2}{2} 1 = -\frac{qL^3}{6EI}$$

Exemple



Déformée d'une poutre simple uniformément chargée ($EI = \text{cste}$)

$$y_{\max} = \frac{L}{EI} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{qL^2}{8} \right] \frac{L}{4} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

Effets thermiques

- élévation uniforme de température

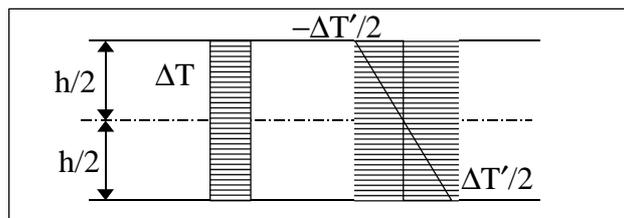
$$- \Delta T = T_{\text{après}} - T_{\text{avant}}$$

- gradient thermique (constant)

$$- \Delta T'/h$$

$$\varepsilon_x = \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_x = \alpha \frac{\Delta T'}{h} y$$



Effets thermiques

- contribution du gradient thermique

$$\int_V \tau'_{ij} a_{ij} dV = \int_V \frac{M'y}{I} \alpha \frac{\Delta T'}{h} y dV$$

$$= \int_{\ell} \alpha \frac{\Delta T'}{h} M' dx$$

- contribution de la température

$$\int_V \tau'_{ij} a_{ij} dV = \int_V \frac{N'}{A} \alpha \Delta T dV$$

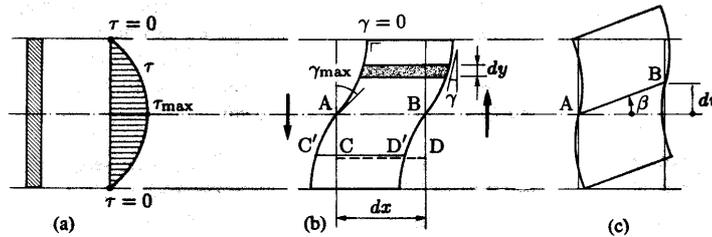
$$= \int_{\ell} \alpha \Delta T N' dx$$

Intégrale de Mohr

$$\delta = \int_{\ell} \frac{MM'}{EI} dx + \int_{\ell} \frac{NN'}{EA} dx + \int_{\ell} \chi \frac{TT'}{GA} dx$$

$$+ \int_{\ell} \alpha \frac{\Delta T'}{h} M' dx + \int_{\ell} \alpha \Delta T N' dx$$

Effet de l'effort tranchant



Déformation d'une tranche dx d'une poutre à section rectangulaire sous l'effet de l'effort tranchant :
 (a) diagramme τ ; (b) gauchissement des sections; (c) angle de glissement moyen.

$\gamma = \chi \frac{T}{GA}$ $= \frac{T}{GB}$	aire réduite $B = \frac{A}{\chi}$
---	--------------------------------------

Effet de T : équation différentielle

- La contribution additionnelle due à T est donnée par

$$y' = \chi \frac{T}{GA} \Rightarrow y'' = \frac{\chi}{GA} \frac{dT}{dx}$$

- La ligne élastique est solution de

$$y'' = -\frac{M}{EI} - \chi \frac{q}{GA}$$

Effet de T : exemple

- poutre isostatique sur 2 appuis, charge q uniforme

$$y_M = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} ; y_T = \chi \frac{L^2}{8GA} q$$

$$y = y_M + y_T = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \left(1 + 2,5 \frac{h^2}{L^2} \right)$$

- section rectangulaire en acier

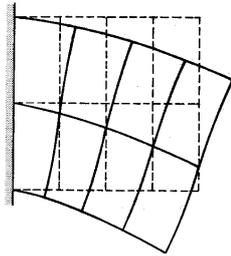
$\chi = \frac{6}{5}; I/A = \frac{h^2}{12}$	$\nu = 0,3; E/G = 2,6$
$\frac{h}{L} := \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{y_T}{y} \approx 2,5\%$	$\frac{h}{L} \uparrow \Rightarrow \frac{y_T}{y} \uparrow$

Effet de T : aires réduites

Section droite (effort tranchant V_y)			 Tube carré			 $\frac{A}{2}$ $\frac{A}{2} = A_w$
Aire réduite B	$\frac{5}{6} A$	$\frac{27}{32} A$	$\frac{5}{12} A$	$\frac{1}{2} A$	$\sim A_w$	$\sim 0,8 A_w$

Gauchissement entravé

- résultats valables si la poutre est libre de gauchir
- OK si T varie continûment

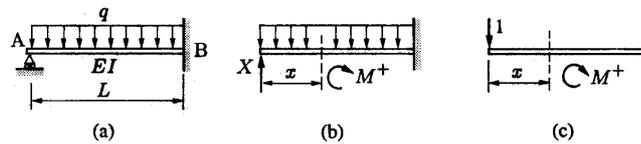


La console est soumise à une charge verticale répartie paraboliquement sur l'extrémité libre. L'échelle des déplacements est exagérée d'un facteur 250 (dessin du post-processeur du programme d'éléments finis SAFE, Prof. J. Jiroušek, LSC, EPFL).

Déformée d'une console à section rectangulaire, en tenant compte de l'effort tranchant. A cause de l'encastrement, le gauchissement varie, bien que l'effort tranchant soit constant.

Intro aux systèmes hyperstatiques

- illustration sur un système 1x hyperstatique



flèche due à q	$\delta_A = \frac{1}{8} qL^2$
----------------	-------------------------------

flèche due à X_A	$\delta_A = -\frac{1}{8} X_A L^2$
--------------------	-----------------------------------

$X_A = 3 \frac{qL}{8}$

- (a) \equiv (b)
- (b) = superposition charge répartie + réaction

*12 -
Propriétés mécaniques des matériaux
et modèles non linéaires*

Propriétés mécaniques des matériaux

- motivation
 - modélisation macroscopique
 - données nécessaires au dimensionnement
 - conditions réelles vs. conditions de laboratoire

Propriétés mécaniques des matériaux

- essais
 - essai de traction/compression
 - essai de torsion (cf. chapitre sur la torsion)
 - essai de fatigue
 - essai de dureté (pour mémoire)
 - essai de résilience (effet de la température)
 - essai de fluage

Conditions des essais

- grandeurs mesurées τ_{ij} , a_{ij} , t , T
- matériaux isotropes et homogènes
- à température ambiante (sauf si effet de T)
- phénomènes indépendants du temps
(sauf fatigue, fluage, relaxation, recouvrance)
- essais statiques (sauf fatigue)

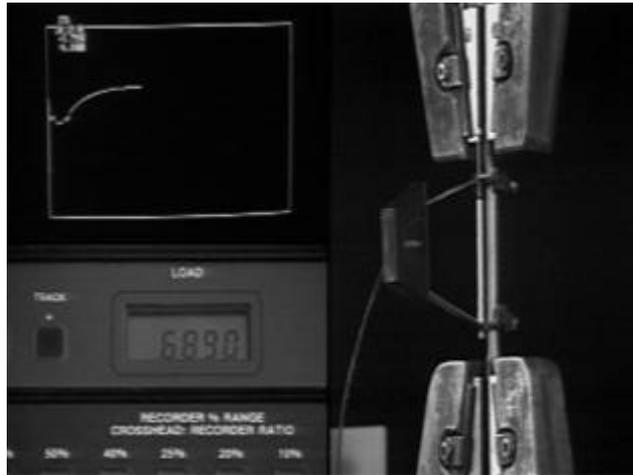
Essai de traction (compression)

- essai purement unidimensionnel
 - résultat considéré valable pour la flexion des poutres
- conditions de l'essai
 - sections planes restent planes
 - distribution uniforme des contraintes et déformations

Essai de traction



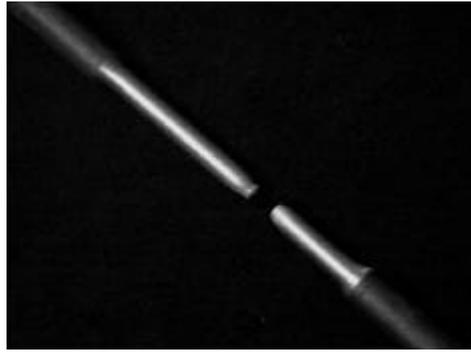
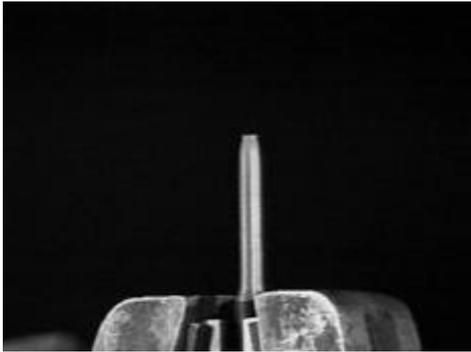
Essai de traction



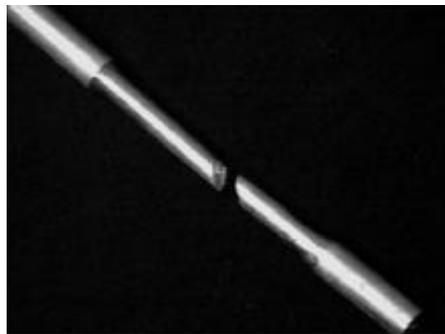
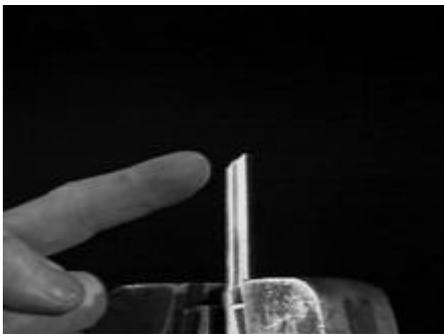
Essai de traction



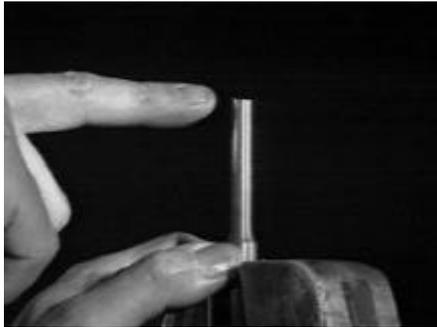
Essai de traction



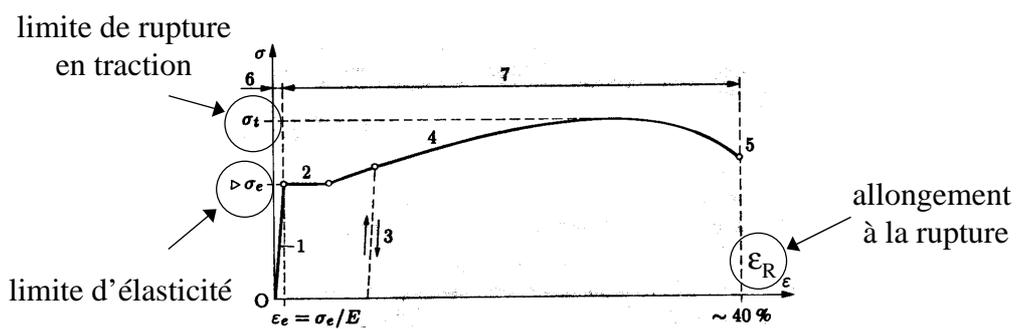
Essai de traction



Essai de traction

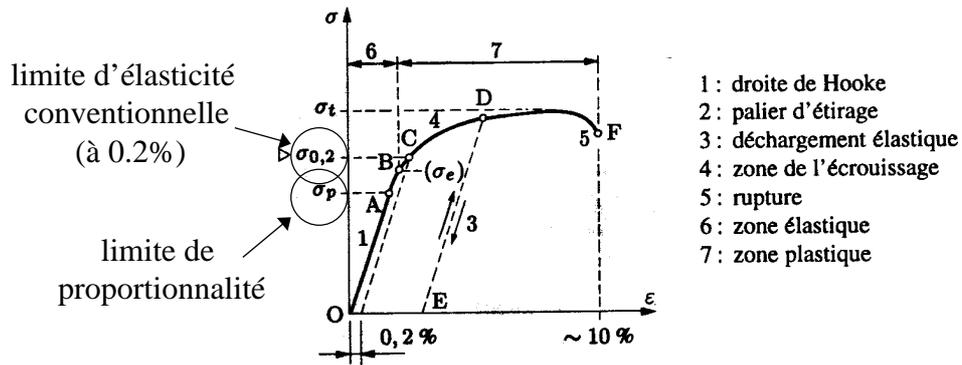


Matériaux ductiles : acier doux

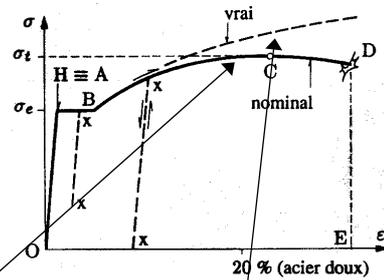
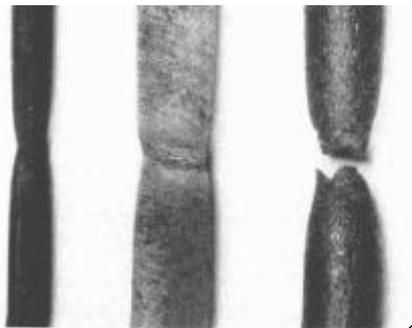


- 1 : droite de Hooke
- 2 : palier d'étirage
- 3 : déchargement élastique
- 4 : zone de l'écrouissage
- 5 : rupture
- 6 : zone élastique
- 7 : zone plastique

Matériaux ductiles : aluminium



Striction



contrainte nominale

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

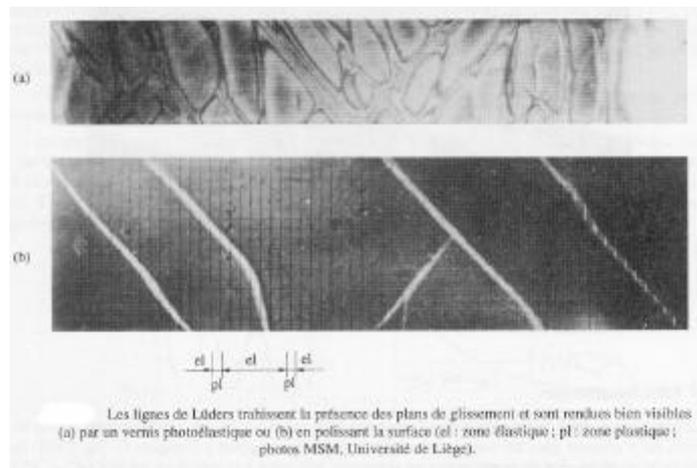
A = section initiale

contrainte vraie

$$\sigma' = \frac{N}{A'}$$

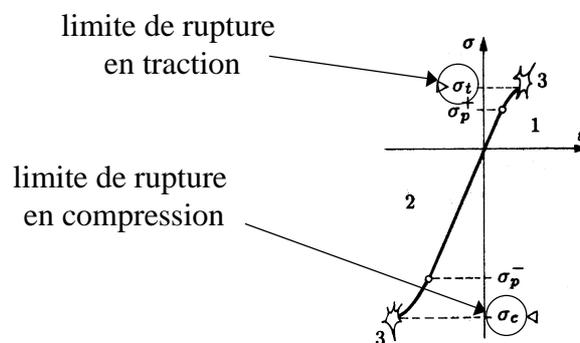
A' = section réelle

Bandes de Lüders

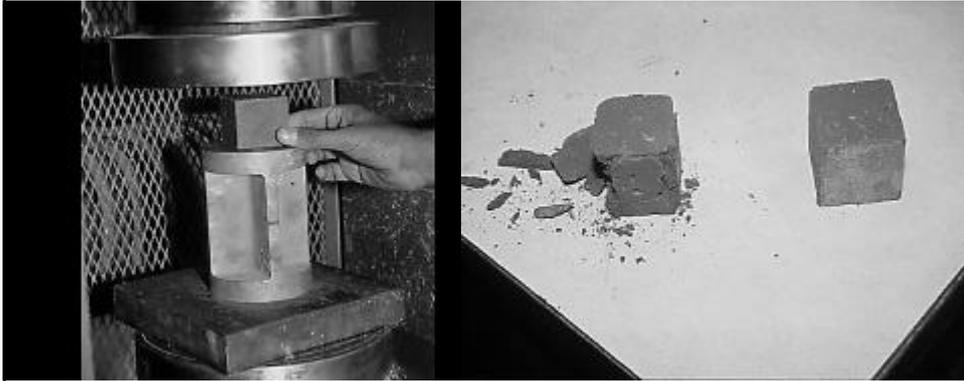


Matériaux fragiles

- exemples : verre, béton, fonte



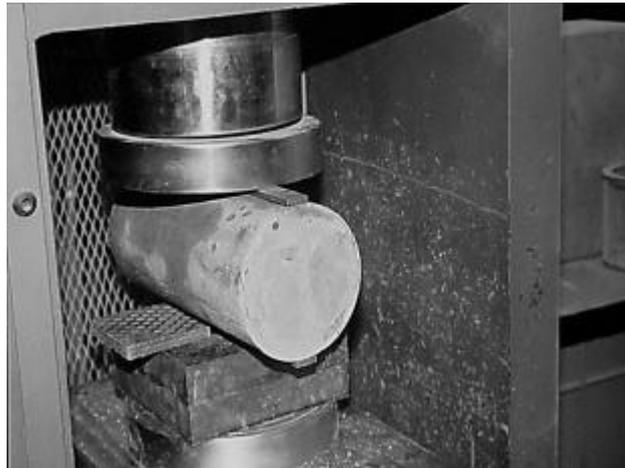
Essai de compression



Essai de compression



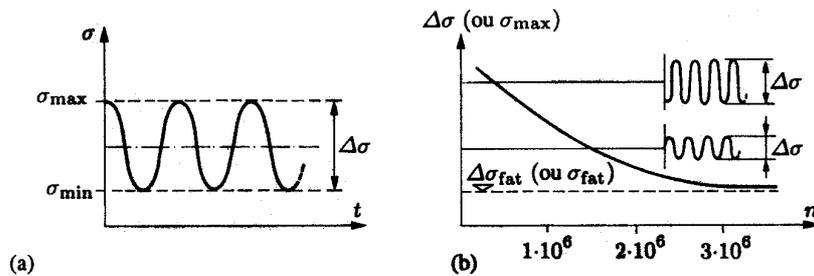
Essai brésilien



Essai de fatigue

- définition
 - décroissance de la résistance du matériau aux actions variables (cycliques) avec le temps
- courbes d'endurance (de Wöhler)
 - grande dispersion dans les résultats
- limite de fatigue conventionnelle

Essai de fatigue : courbe de Wöhler



Fatigue : (a) sollicitation pulsatoire ; (b) courbe de fatigue ou de Wöhler.

pour les métaux : $\sigma_{\text{fat}} \approx 0,37\sigma_t + 77$ (MPa)

Rupture par fatigue

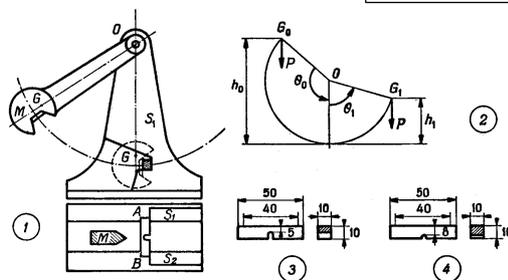
- amorçage
 - présence de défauts \Rightarrow concentration de contraintes
- propagation
 - vitesse de propagation
- rupture
 - *faciès* de rupture typique

Effets de la température

- rupture fragile
 - essai de résilience
 - température de transition ductile-fragile (TTDF)
- variation des propriétés mécaniques
 - les propriétés mécaniques diminuent avec T
 - protection contre les incendies

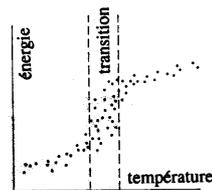
Essai de résilience

- rupture d'une éprouvette sous l'action d'un mouton
 - énergie nécessaire à la rupture $W = mg(h_0 - h)$



Essai de résilience

- température de transition ductile-fragile (TTDF)

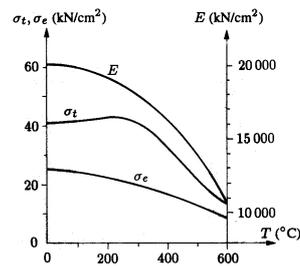


Fragilité et température de transition.

rupture fragile d'un matériau ductile possible si simultanément :

- présence d'un défaut
- sollicitation par traction
- basse température

Variation des propriétés



Caractéristiques mécaniques de l'acier doux à différentes températures T .

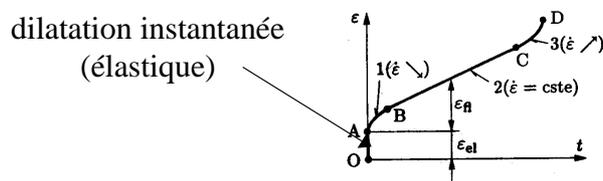
- protection contre les incendies : la norme définit RF = la durée de résistance au feu (1h, 2h, ...)
- protection des structures métalliques par flocage, enrobage, ...

Effets différés

- fluage
 - accroissement de déformation d'une pièce soumise à des forces constantes
- relaxation
 - diminution des contraintes dans une pièce soumise à une déformation constante
- recouvrance
 - récupération après fluage des propriétés initiales

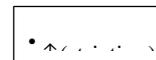
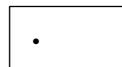
Fluage

- essai de fluage sur métal à haute température
- éprouvette de traction soumise à contrainte \uparrow



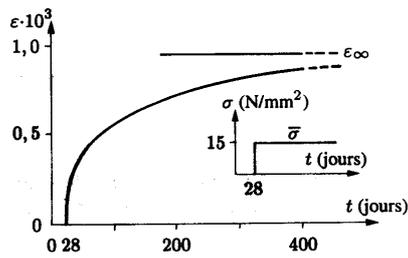
Courbe type de fluage (1 : fluage primaire; 2 : fluage secondaire; 3 : fluage tertiaire).

$$\dot{\epsilon}_{XX} = \dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$$



Fluage

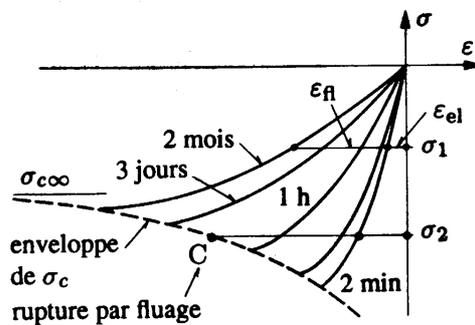
- contrainte appliquée reste modérée (\approx service)
- \Rightarrow allongement total se stabilise ϵ_{∞}



Fluage d'une éprouvette de béton comprimée ($\bar{\sigma} = 15 \text{ N/mm}^2$ appliqué à 28 jours).

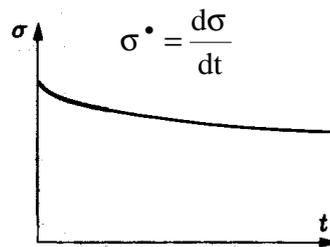
Rupture par fluage

- essai de courte durée



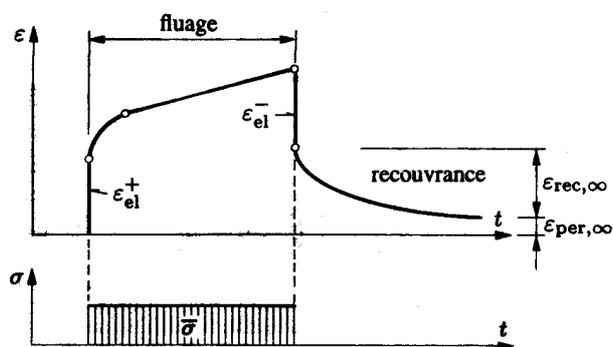
Relaxation

- essai à allongement constant



Courbe de relaxation

Recouvrance

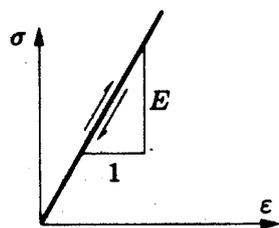


Phénomène de recouvrance (après fluage).

Modèles mathématiques des matériaux

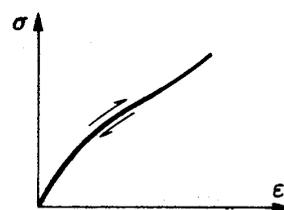
- lois constitutives
- modèles unidimensionnels indépendants du temps
 - modèles élastiques
 - modèle élastique linéaire
 - modèle élastique non linéaire
 - modèle élastique parfaitement plastique
 - modèle élastoplastique à écrouissage

Modèles élastiques



$$\sigma = E\epsilon$$

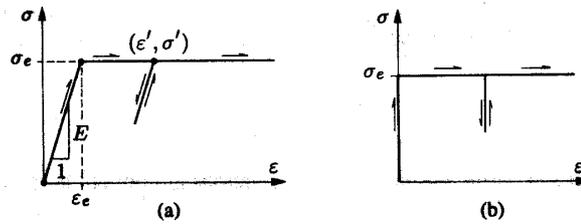
loi de Hooke 1D



$$\sigma = \sigma(\epsilon)$$

caoutchouc
travaux virtuels

Modèles élastoplastiques

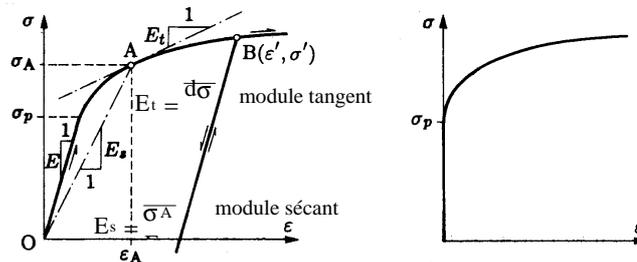


Modèles plastiques sans écrouissage : (a) modèle élastique parfaitement plastique ;
(b) modèle rigide parfaitement plastique.

$\sigma = E\varepsilon$	si $\varepsilon \leq \varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$	(Hooke)
$\sigma = \sigma_e$	si $\varepsilon > \varepsilon_e$	(chargement)
$\sigma - \sigma' = E(\varepsilon - \varepsilon')$	si $\varepsilon < \varepsilon_e$	(déchargement)

matériaux à palier plastique important (acier) et calculs plastiques

Modèle avec écrouissage



$\sigma = E\varepsilon$	si $\sigma \leq \sigma_p$	(Hooke)
$\sigma = \sigma_e$	si $\sigma > \sigma_p$	(chargement)
$\sigma - \sigma' = E(\varepsilon - \varepsilon')$	si $\varepsilon < \varepsilon_e$	(déchargement)

Modèles non linéaires

- hypothèse de linéarité matérielle abandonnée
- les relations du type

$$u = \frac{NL}{EA} ; \frac{1}{R_y} = -\frac{M}{EI} ; \sigma = \frac{My}{I}$$

- ne sont plus valables !
- mais les modèles plus réalistes ...

Critères rhéologiques

- motivation
 - jusqu'à présent, tout 1D. qu'arrive-t-il en 2D ? 3D ?
- critère de Tresca
- critère de von Mises
- critère de la courbe intrinsèque
 - pour mémoire

Loi de Hooke

- on se base sur le modèle élastique linéaire isotrope

$$a_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\tau_{ij} - \nu\delta_{ij}\tau_{kk}]$$
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Critère de Tresca

- bandes de Lüders : plastification par glissement
- contrainte tangentielle maximale

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$$

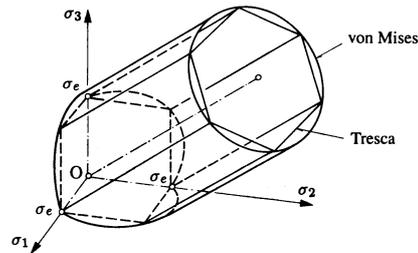
contrainte de
comparaison

$$\sigma^* = \sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_e$$

- exemple : poutre en flexion plane

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_e$$

Critère de von Mises



équation du cylindre	$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_e^2$
critère	$\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \sigma_e$

Critère de von Mises : exemples

– cisaillement pur

$$\tau = \tau_e = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = 0,577\sigma_e$$

– poutre en flexion plane

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_e$$

– comparaison et expériences

13 - Traction plastique

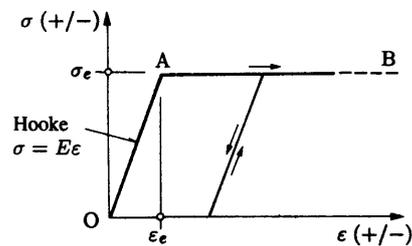
Traction plastique

- rappel : dimensionnement élastique
 - milieu continu
 - linéarité géométrique
 - linéarité matérielle : loi de Hooke
- objection : loi de Hooke
 - néglige l'adaptation élastoplastique
 - quel est le degré réel de sécurité ?

$$\exists \sigma_{\max}^* = \sigma_e$$

Théorie de la plasticité

- milieu continu
- modèle élastoplastique parfaitement plastique
- déchargement élastique
- on cherche la charge limite (de ruine)



Traction plastique

- pièce homogène

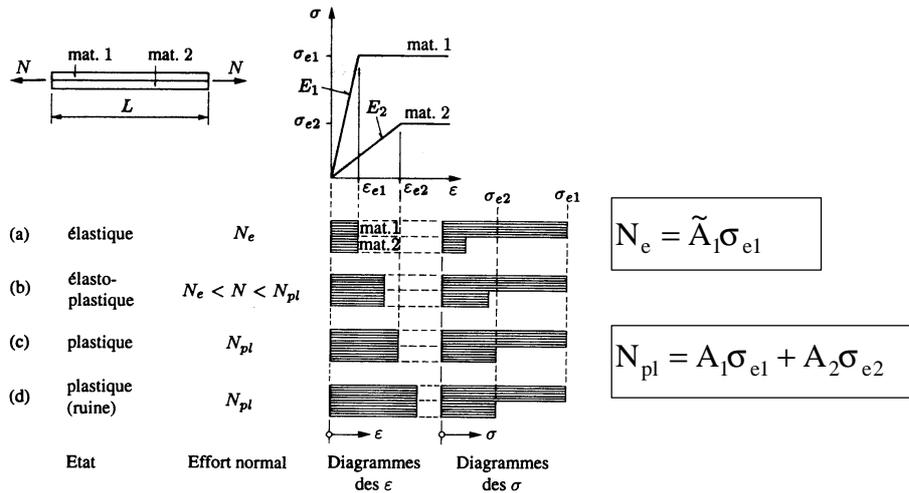
$$N_{pl} \equiv N_e = A \sigma_e$$

- pièce composée de 2 matériaux

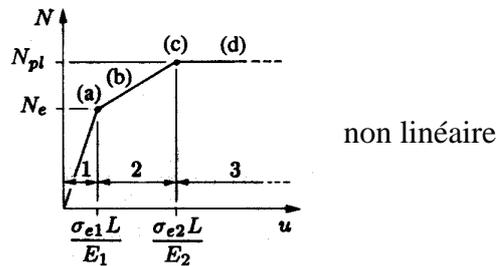
- condition cinématique (Bernoulli) reste valable

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Traction plastique 2 matériaux



Courbe force-déplacement



Courbe allongement-effort normal (pièce composée ; 1 : état élastique ; 2 : état élasto-plastique ; 3 : état plastique)

Bénéfice dû à la plasticité

- dépend des matériaux et des sections
- \exists aussi un gain dû à l'hyperstaticité
- exemple : Acier A_1 et Aluminium A_2 , $A_1=A_2$, $n=3$ et $\sigma_{e1}=\sigma_{e2}$
- dimensionnement élastique

$$A_1 = A_1 + \frac{A_2}{n} = \frac{4}{3} A_1 \Rightarrow N_e = \frac{4}{3} A_1 \sigma_{e1}$$

Gain

$$\frac{N_{pl}}{N_e} = 1,5$$

- dimensionnement plastique

$$N_{pl} = A_1 \sigma_{e1} + A_2 \sigma_{e2} = 2A_1 \sigma_{e1}$$

Propriétés importantes

- isostaticité de la charge limite
 - la charge limite est statiquement déterminée
- conception de la ruine - ELU
- contraintes résiduelles et dilatations permanentes

Contraintes résiduelles

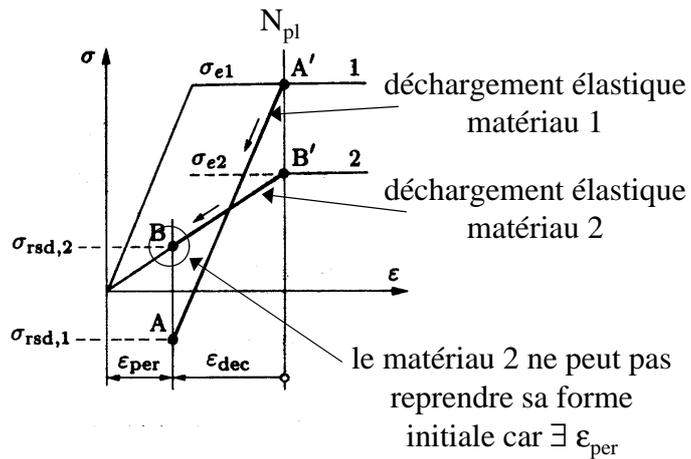
$$\sigma_{\text{rsd},2} = \sigma_{e2} - \frac{N_{\text{pl}}}{n\tilde{A}_1}$$

$$\sigma_{\text{rsd},1} = \sigma_{e1} - \frac{N_{\text{pl}}}{\tilde{A}_1}$$

$$\Downarrow$$

$$A_1\sigma_{\text{rsd},1} + A_2\sigma_{\text{rsd},2} = 0$$

autocontrainte



Contraintes résiduelles

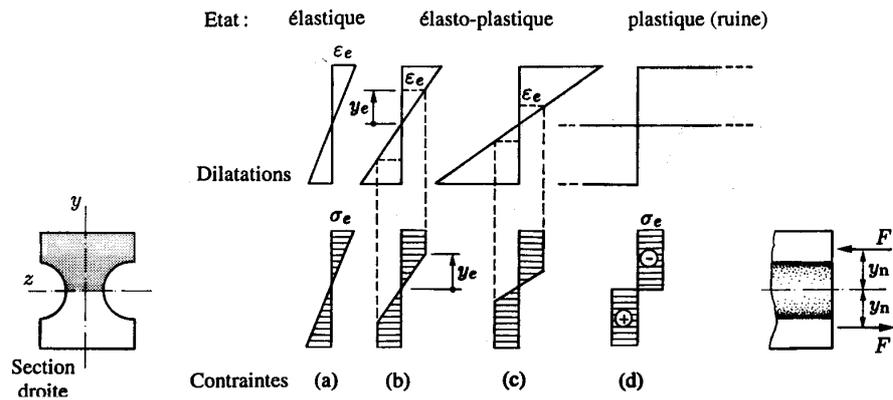
- une structure ne se comporte plastiquement qu'à sa première mise en charge, après quoi elle se comporte élastiquement grâce aux contraintes résiduelles produites par la déformation plastique initiale

14 - Flexion plastique plane

Flexion plastique plane

- matériau élastique parfaitement plastique
 - critères de dimensionnement
 - moment plastique
 - rotule plastique
- hypothèses
 - pas influence de N et T, M constant
 - Bernoulli

Sections doublement symétriques



Dimensionnement élastique

- $M \leq M_e$ (rappel)
 - moment élastique maximal

– courbure élastique

$$M_e = \frac{I_z}{y_{\max}} \sigma_e$$

$$\frac{1}{R_y} = \psi_e = -\frac{M_e}{EI_z}$$

Dimensionnement élastoplastique

- $M_e \leq M \leq M_{pl}$
 - les fibres supérieures et inférieures plastifient simultanément
 - équation d'équilibre de translation ($N = 0$)

$$\int_A \sigma dA = 0$$

⇒ l'axe neutre est donc toujours au centre de gravité

- la distance y_e (voir figure) est donné par

$$y_e = \frac{\epsilon_e}{\psi}$$

Charge ultime

- le moment ultime est donné par

$$\begin{aligned} M_{pl} &= \int_A \sigma y dA \\ &= \sigma_e \int_A |y| dA \\ &= 2\sigma_e \int_{A/2} |y| dA \\ &= 2S(A/2)\sigma_e \end{aligned}$$

moment statique de la demi-section

Z module plastique (m^3)

Section rectangulaire

- section de largeur b et de hauteur h
 - module de résistance élastique

– module de ré $\frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6} \Rightarrow M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_e$

– gain (fa $S(A/2) = b \frac{h}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} \Rightarrow M_{pl} = \frac{bh^2}{4} \sigma_e$

$$\varphi = \frac{M_{pl}}{M_e} = 1.5$$

Flexion plastique plane : profil idéal

- on dispose de 3 critères

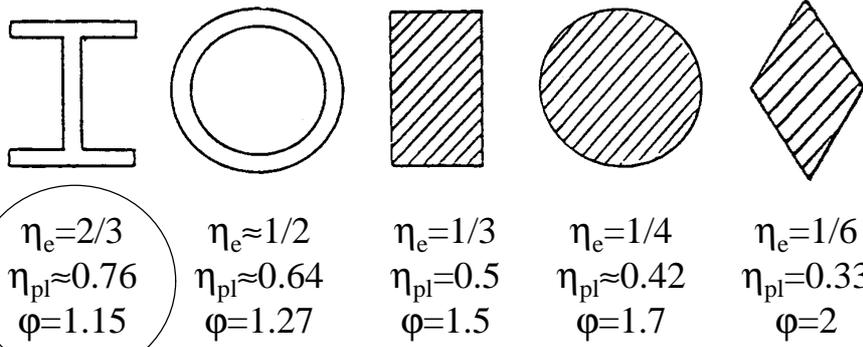
– rendement élastique (rappel) $\eta_e = \frac{I / y_{\text{sup/inf}}}{(I / y_{\text{sup/inf}})_{\text{th}}}$

– rendement plastique $\eta_{pl} = \frac{M_{pl}}{M_{pl\text{th}}} = \frac{Z}{Z_{\text{th}}}$

– facteur de forme $\varphi = \frac{M_{pl}}{M_e}$

- mesure la réserve de résistance en flexion

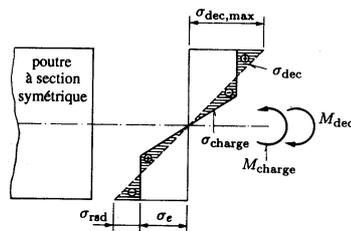
Flexion plastique plane : profil idéal



ϕ n'est pas le seul critère !

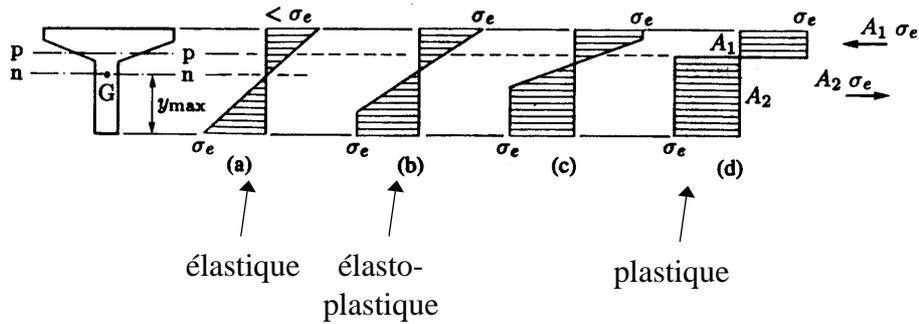
Déchargement

- partons de $M_e \leq M \leq M_{pl}$
 - lors d'un déchargement, il subsiste une courbure permanente et des contraintes résiduelles



$$\sigma_{rsd} = \pm \left(\sigma_e - \frac{M}{I/y_{max}} \right)$$

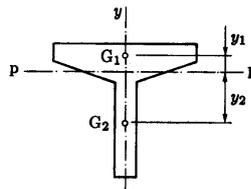
Sections à un seul axe de symétrie



la position de l'axe neutre est donné par

$$\int_A \sigma dA = 0 \Rightarrow \sigma_e (A_2 - A_1)$$

Axe neutre plastique



Axe neutre plastique (p-p) d'une section à un seul axe de symétrie.

- l'axe neutre plastique divise la section en 2 aires égales
- le moment plastique est donné directement par

$$Z = \frac{A}{2} (y_1 + y_2)$$

Pièces composées

- l'axe neutre se détermine par l'équation

$$\int_A \sigma dA = 0$$

souvent résolue par tâtonnements

Loi moment-courbure

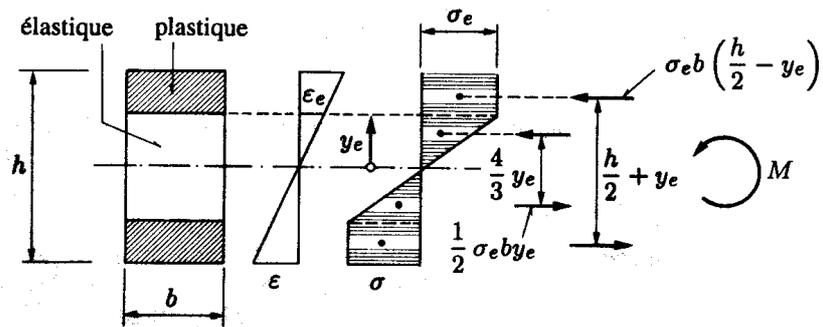
- relation à chaque instant entre moment et courbure
- on préfère un diagramme non dimensionnel

M/M_e en fonction de ψ/ψ_e

$$M_e = \frac{I_z}{y_{\max}} \sigma_e$$

$$\psi_e = -\frac{M_e}{EI_z}$$

Section rectangulaire



Etat élastique

- $M \leq M_e$
– courbure élastique

$$\psi = -\frac{M}{EI_z}$$



$$\frac{M}{M_e} = \frac{-EI_z \psi}{-EI_z \psi_e}$$

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\psi}{\psi_e}$$

Etat élastoplastique

- $M_e \leq M \leq M_{pl}$
 - le moment élastoplastique peut être calculé aisément par calcul des résultantes et bras de levier (voir figure)

$$M = \sigma_e b \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(\frac{h}{2} + y_e \right) + \frac{1}{2} \sigma_e b y_e \frac{4}{3} y_e \quad M = \sigma_e \frac{bh^2}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right)$$
$$M = \sigma_e b \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3} \right) \quad M = M_{pl} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right)$$

Etat élastoplastique

- Or, à l'état élastique (Bernoulli)

$$y_e = \frac{\varepsilon_e}{\psi} \quad \text{avec } \varepsilon_e = \psi_e \frac{h}{2} \text{ lorsque } M = M_e$$

$$\Rightarrow y_e = \frac{\psi_e}{\psi} \frac{h}{2}$$

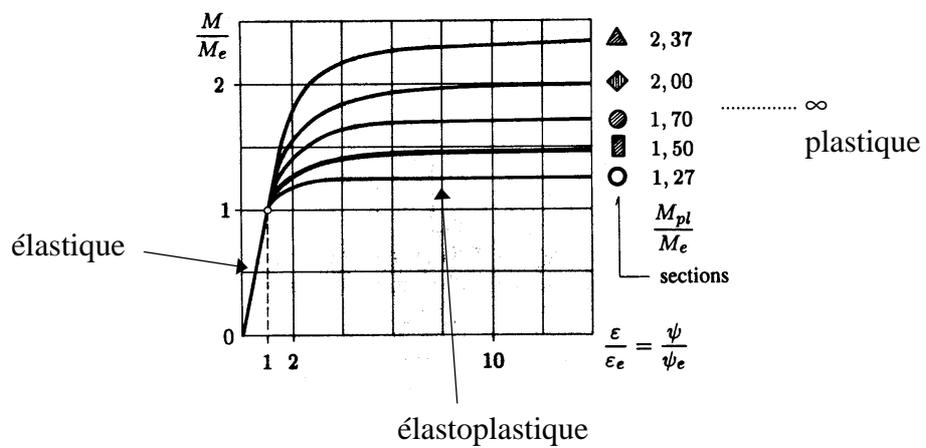


$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_{pl}}{M_e} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^2 \right)$$

Etat plastique

$$\frac{\psi_e}{\psi} \rightarrow \infty$$
$$\frac{M}{M_e} \rightarrow \frac{M_{pl}}{M_e} = 1.5$$

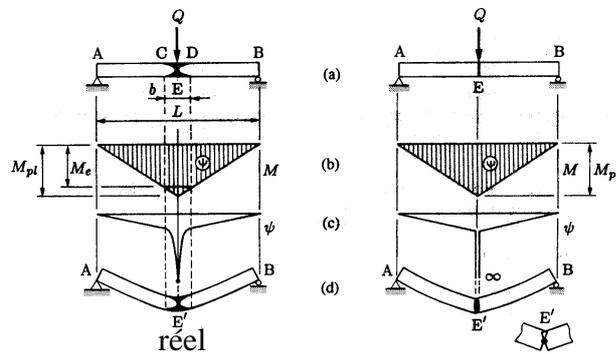
Lois moment-courbure pour sections droites



Flexion plastique plane

- notion de rotule plastique
 - courbe moment-courbure
 - la poutre a un comportement élastique parfaitement plastique : elle reste élastique jusqu'à l'instant où le moment plastique M_{pl} est atteint, puis elle fléchit plastiquement à moment constant.
 - pas de plastification due à T ou à N
 - localisation des déformations (de la courbure)

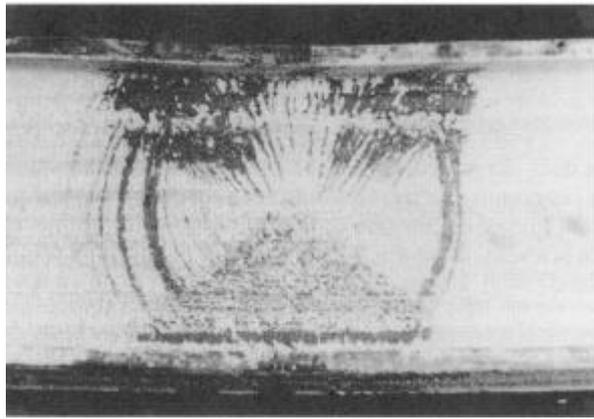
Rotule plastique



localisation de courbure dans CD
AC et DB restent élastiques

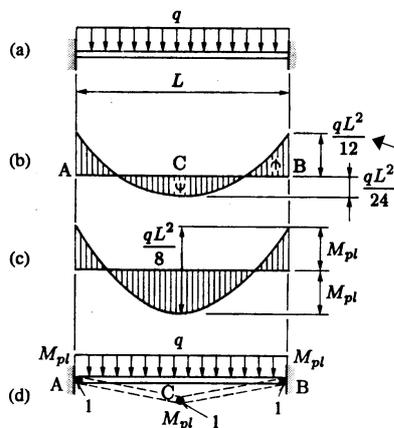
modèle simplifié
localisation de courbure en E
poutre quasi-articulée en E'

Rotule plastique



rotule est un terme abusif car la rotation n'est pas libre

Charge limite des structures hyperstatiques



poutre bi-encastée 2x hyperstatique
(en fait 3)

charge totale : $Q = qL$

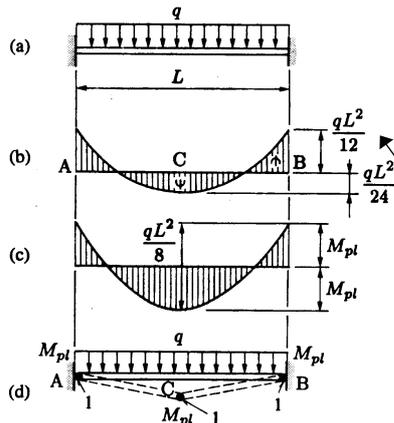
moment **élastique** maximal

$$M_{\max} = M_A = M_B = \frac{q_e L^2}{12}$$

charge limite élastique

$$Q_e = 12 \frac{M_e}{L}$$

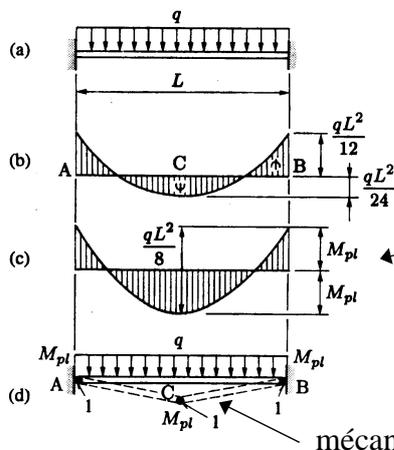
Charge limite des structures hyperstatiques



les moments d'encastrement provoquent l'apparition de deux rotules plastiques : la poutre est isostatique. Les moments d'encastrement valent donc au maximum

$$M_{\max} = M_A = M_B = \frac{q_{2r} L^2}{12}$$

Charge limite des structures hyperstatiques



si on continue à augmenter q, il apparaît une troisième rotule plastique. La poutre est isostatique et on a

$$\frac{q_{3r} L^2}{8} = 2M_{pl}$$

charge limite plastique

$$Q_{pl} = 16 \frac{M_{pl}}{L}$$

mécanisme de ruine

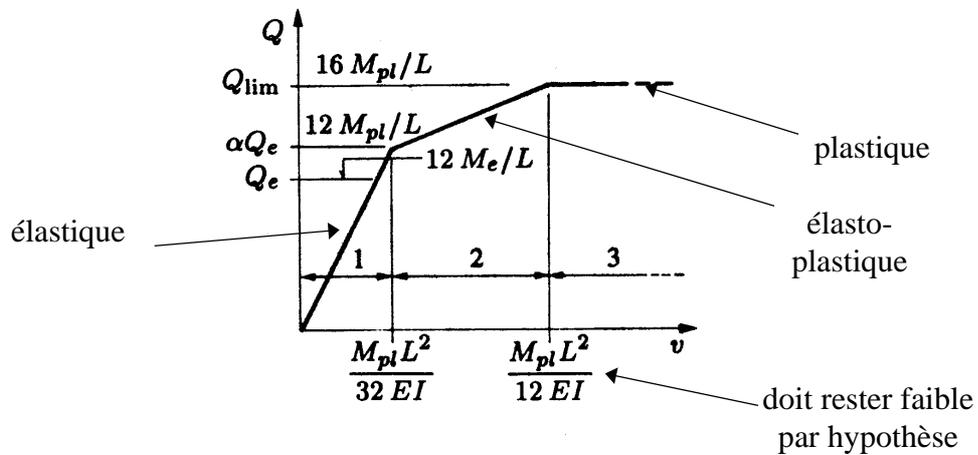
Gain dû à l'hyperstaticité

- réserve de résistance des structures hyperstatiques

$$\frac{Q_{pl}}{Q_e} = \frac{16 M_{pl}}{12 M_e} = \left(\frac{4}{3}\right)\phi$$

gain dû à la redistribution entre les sections

Courbe charge-flèche



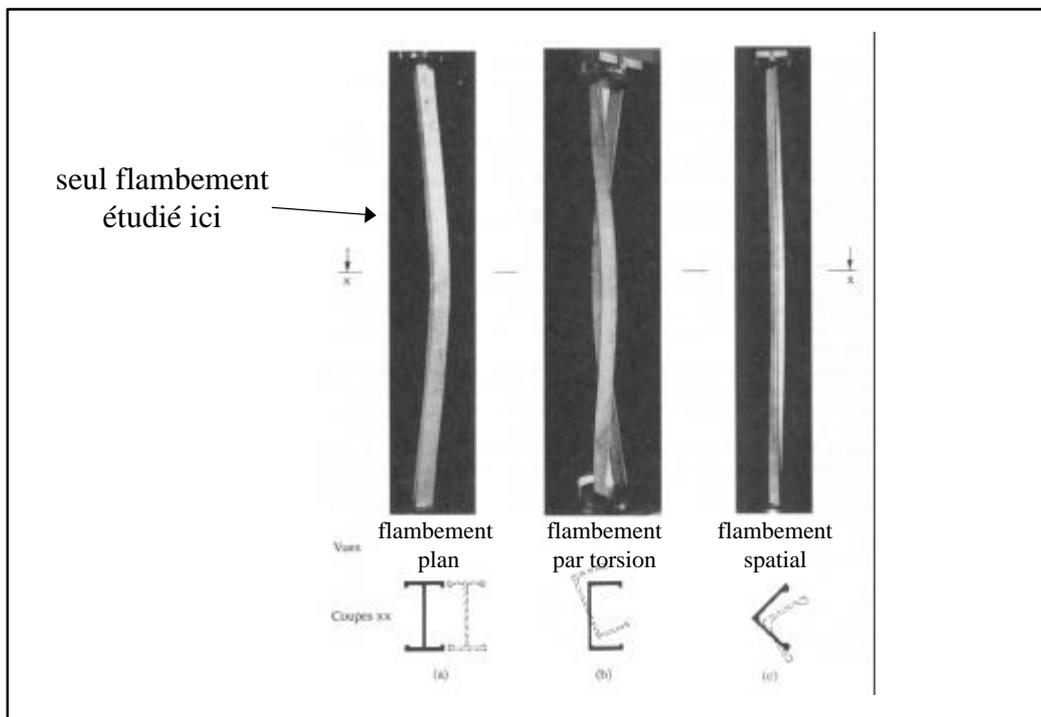
15 - Instabilités

Instabilités

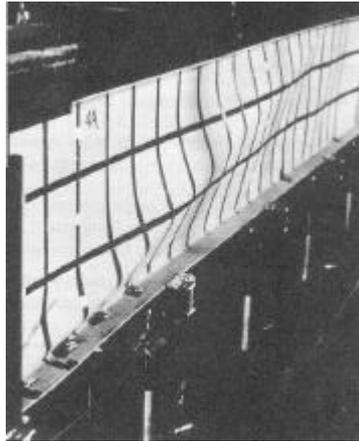
- la conception de structures exige aujourd'hui
 - économie
 - légèreté
 - matériaux à haute résistance
- réduction progressive des sections résistantes
- contraintes en service importantes

Types d'instabilités

- danger d'instabilité dans toute structure **comprimée**
 - flambement (compression pure)
 - déversement (flexion)
 - voilement (torsion)
- phénomènes d'instabilité
 - locaux (barres de treillis, voilement, ...)
 - globaux (flambement d'ensemble, ...)

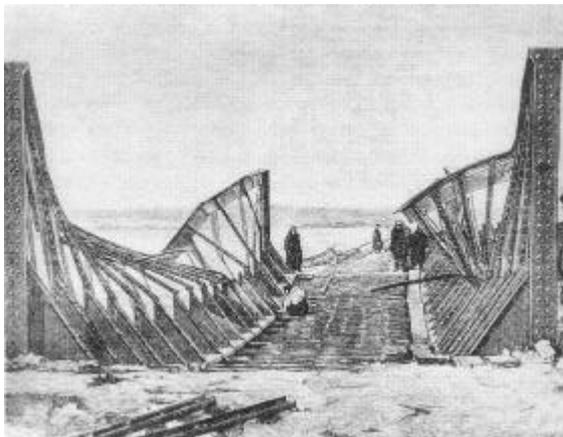


Instabilités locales : exemple



voilement de l'âme mince
d'une poutre en acier.
effet de l'effort tranchant

Instabilités globales : exemple



flambement d'ensemble
de la membrure
supérieure des poutres en
treillis d'un pont de
chemin de fer
(Russie, vers 1890)

Flambement des poutres

- flambement par divergence
 - la poutre se dérobe à l'effort normal de compression en fléchissant transversalement*
 - le phénomène est non linéaire
 - il doit exister une flexion initiale
 - exemples : courbure initiale, excentrement de l'effort normal ...

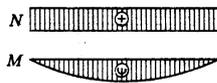
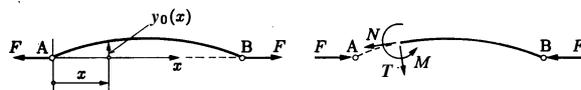
Hypothèses de modélisation

- une étude rigoureuse nécessite la prise en compte
 - des non linéarités géométriques (grands déplacements)
 - des non linéarités matérielles
- ici, on postule
 - grands déplacements mais rotations modérées
 - linéarité matérielle (loi de Hooke)

Courbure initiale

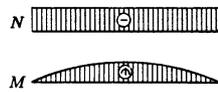
- La poutre est légèrement courbe

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{dy_0}{dx}, \quad |\theta_0| \ll 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_0 = \theta_0; \quad \sin\theta_0 = \theta_0; \quad \cos\theta_0 = 1$$



TRACTION

$F \Rightarrow \text{courbure} \downarrow \Rightarrow M \downarrow$



COMPRESSION

$F \Rightarrow \text{courbure} \uparrow \Rightarrow M \uparrow$

$$N = F \cos\theta_0 \approx F$$

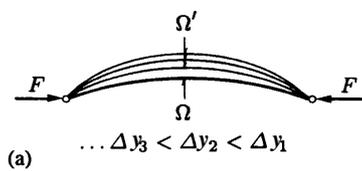
$$M = Fy_0(x)$$

$$T = F \sin\theta_0 \approx F\theta_0$$

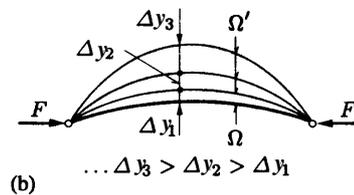
flexion composée M+N
principe de superposition ?

Stabilité de la divergence

Flambement stable

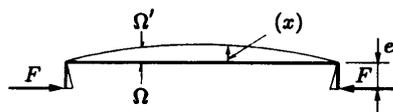


Flambement instable



Autres causes de flexion initiale

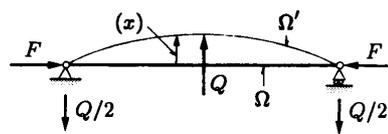
Excentration de la charge



$$\begin{aligned} \text{Dans } \Omega : M_{lin} &= Fe \\ \text{Dans } \Omega' : M &= F(e + y) > M_{lin} \end{aligned}$$

Exemples d'application :
ressorts, étuis à lunettes ...

Charges axiales et transversale



$$\begin{aligned} \text{Dans } \Omega : M_{lin} &= Qx/2 \\ \text{Dans } \Omega' : M &= Qx/2 + Fy > M_{lin} \end{aligned}$$

phénomène non linéaire :
il faut se placer dans la configuration déformée

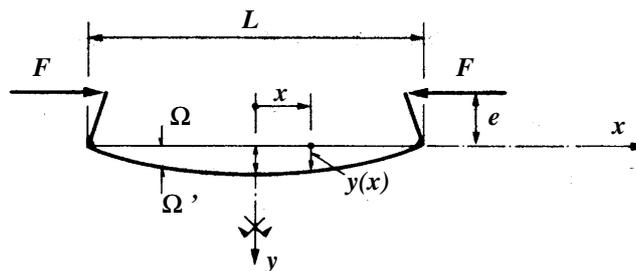
Théories non linéaires du flambement

- actions des forces sur la configuration **déformée**
⇒ le principe de superposition n'est plus valable
- souvent, le flambement se produit alors que la structure est peu déformée
⇒ hypothèse des rotations modérées (2^{ème} ordre)
- le flambement est accentué par la plasticité
– phénomène non pris en compte ici

Modélisation du flambement

rotations modérées	$\frac{1}{R} = y''$	}	équation non linéaire !
flexion plane	$\frac{1}{R} = -\frac{M}{EI}$		$\Rightarrow y'' = -\frac{M(y, F, \dots)}{EI}$
	$M = M(y, F, \dots)$		

Poutre droite comprimée excentriquement



$$M = F(e + y)$$

⇓

$$y'' + \frac{F}{EI}(e + y) = 0$$

Poutre droite comprimée excentriquement

$$y'' + \frac{F}{EI}(e + y) = 0 \quad \text{équation de la déformée}$$

posons $k^2 = F/EI$

$$y'' + k^2 y = -k^2 e$$

Equation de Helmholtz non homogène
EDP 2^{ème} ordre à coeff. constants

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e$$

SGEH+SPENH

conditions aux limites

$$y(-L/2) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ \\ C_2 = \frac{e}{\cos(kL/2)} \end{array}$$

$$y(L/2) = 0$$

Poutre droite comprimée excentriquement

$$y = e \left(\frac{\cos kx}{\cos(kL/2)} - 1 \right)$$

équation de la déformée
(pas linéaire en F !)

$$a = y_{\max} = y_0 = e \left(\sec \frac{kL}{2} - 1 \right)$$

(formule de la sécante)

$$F = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \sec \frac{kL}{2} = 1 \Rightarrow a = 0$$

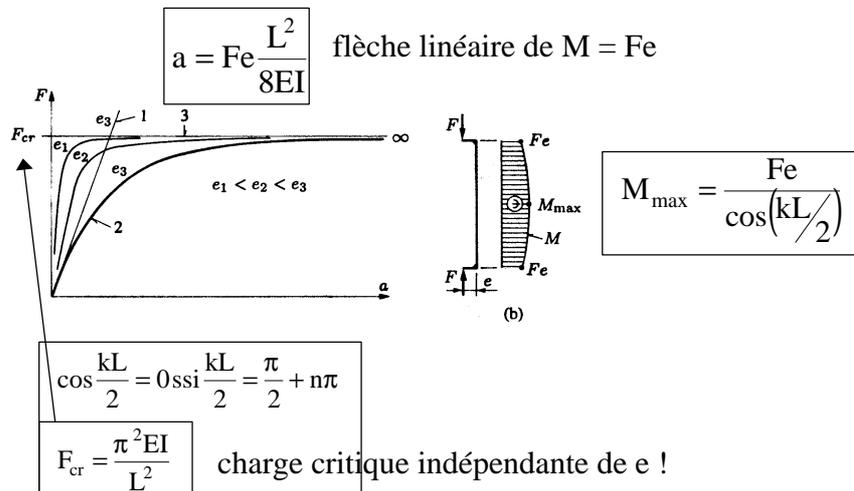
la tangente a pour équation

$$a = Fe \frac{L^2}{8EI}$$

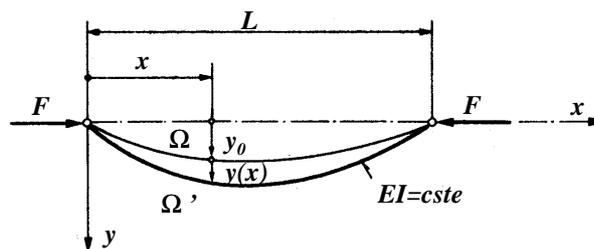
$$\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta F_3 \Rightarrow \Delta a_1 < \Delta a_2 < \Delta a_3$$

si on augmente la charge,
le flambement est divergent

Poutre droite comprimée excentriquement



Poutre comprimée avec courbure initiale



$$M = F(y_0 + y)$$

⇓

$$y'' + k^2(y + y_0) = 0$$

Poutre comprimée avec courbure initiale

$$y_0(x) = a_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad \text{courbure initiale}$$

$$y'' + k^2 y = -k^2 a_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Equation de Helmholtz non homogène} \\ \text{EDP 2}^{\text{ème}} \text{ ordre à coeff. constants} \end{array}$$

conditions aux limites

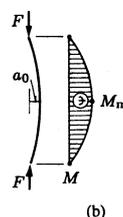
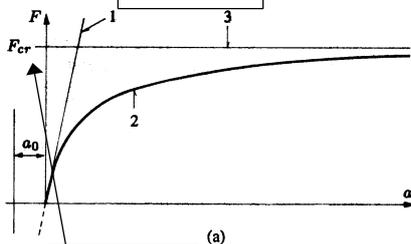
$$y(0) = 0$$

$$y(L) = 0$$

$$y = \frac{a_0}{\frac{\pi^2}{k^2 L^2} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \Rightarrow a = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{a_0 \frac{F}{F_{cr}}}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \quad \text{même } F_{cr}$$

Poutre comprimée avec courbure initiale

$$a = a_0 \frac{F}{F_{cr}} \quad \text{flèche linéaire}$$



$$M_{\max} = F \left[a_0 + \frac{a \frac{F}{F_{cr}}}{1 - \frac{F}{F_{cr}}} \right]$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{2}$$

charge critique indépendante de a_0 !

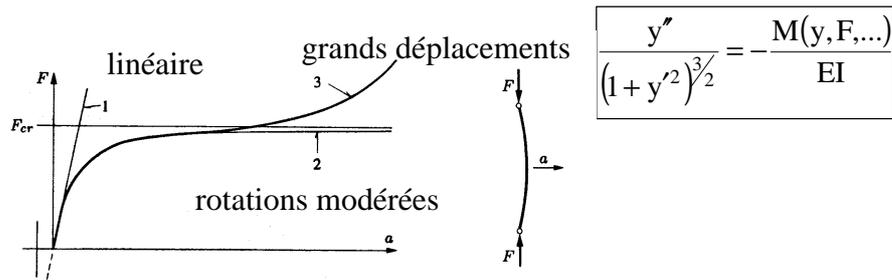
autres cas :

$$F_{cr} = C \frac{EI}{2}$$

toujours indépendant de la flexion initiale

Limitations des résultats obtenus

- hypothèse des rotations modérées



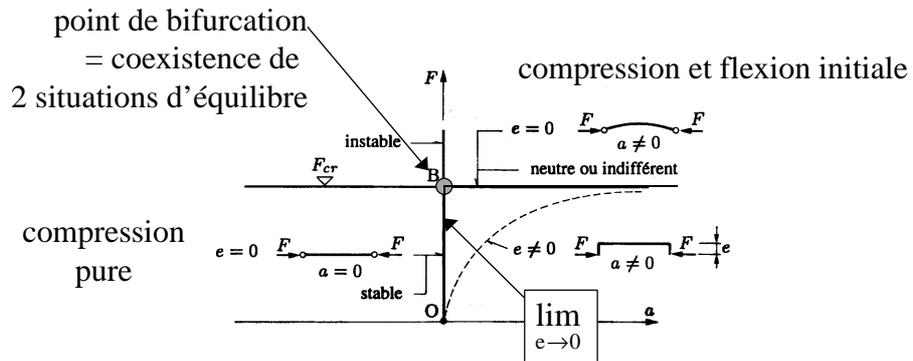
$$\frac{y'''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{M(y, F, \dots)}{EI}$$

$F > F_{cr}$ est **théoriquement** possible
pratiquement les déplacements sont déjà trop grands

Flambement par bifurcation

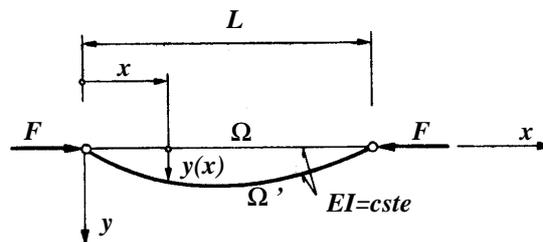
- 💡 F_{cr} est indépendant de l'origine de la flexion initiale et de son importance
- il existe une charge critique même si la poutre est parfaitement rectiligne, libre de toute force transversale et soumise à une force de compression parfaitement centrée
- flambement eulérien par bifurcation

Flambement par bifurcation



le flambement par bifurcation est un cas limite (poutre parfaite)
il n'existe pas mais donne une bonne approximation de F_{cr}

Théorie d'Euler



$$M = Fy$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

équation de Helmholtz

$y(x)$ est l'esquisse de la déformée
= mode de flambement
(dépend des conditions d'appui)

Théorie d'Euler

$$y'' + k^2 y = 0$$
$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad \text{solution générale}$$

conditions aux limites

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ C_1 \sin kL = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{cas trivial } y = 0 \\ kL = n\pi \end{array}$$

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad \text{modes de flambement}$$

Théorie d'Euler : généralisation

- charge critique d'Euler

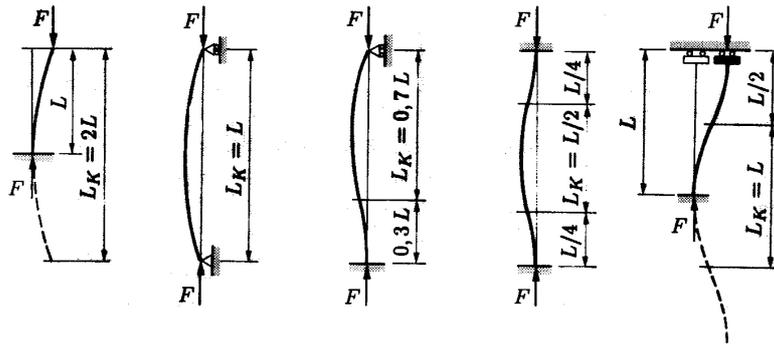
$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L_K^2}$$

- proportionnel à EI (module de rigidité en flexion)
- quel I ? le plus faible !
- L_K = longueur de flambement (dépend des CL)

permet de trouver une approximation de la charge critique quelles que soient les conditions d'appui

Longueur de flambement

- esquisser le premier mode (respect des appuis !)



Élancement

- nombre sans dimensions

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_K^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{AL_K^2}{I}}$$

élancement $\lambda^2 = \frac{L_K^2 A}{I}$

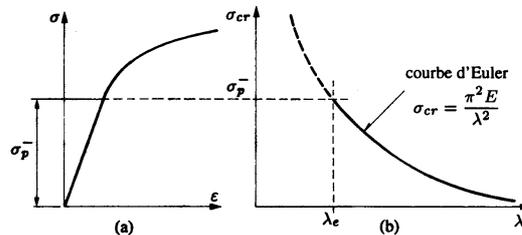
- quantifie la sensibilité au flambement

$0 \leq \lambda < 20$: risque faible $50 \leq \lambda < 80$: risque fort
 $20 \leq \lambda < 50$: risque moyen $80 \leq \lambda$: risque extrême

Validité de la théorie d'Euler

- hypothèse de linéarité matérielle (loi de Hooke)
- valable si

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p^- \quad (\text{limite de proportionnalité})$$

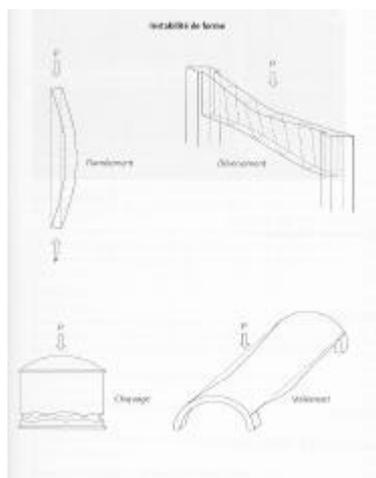


$$\lambda_e = \sqrt{\frac{E}{\sigma_p^-}}$$

Autres formes d'instabilité

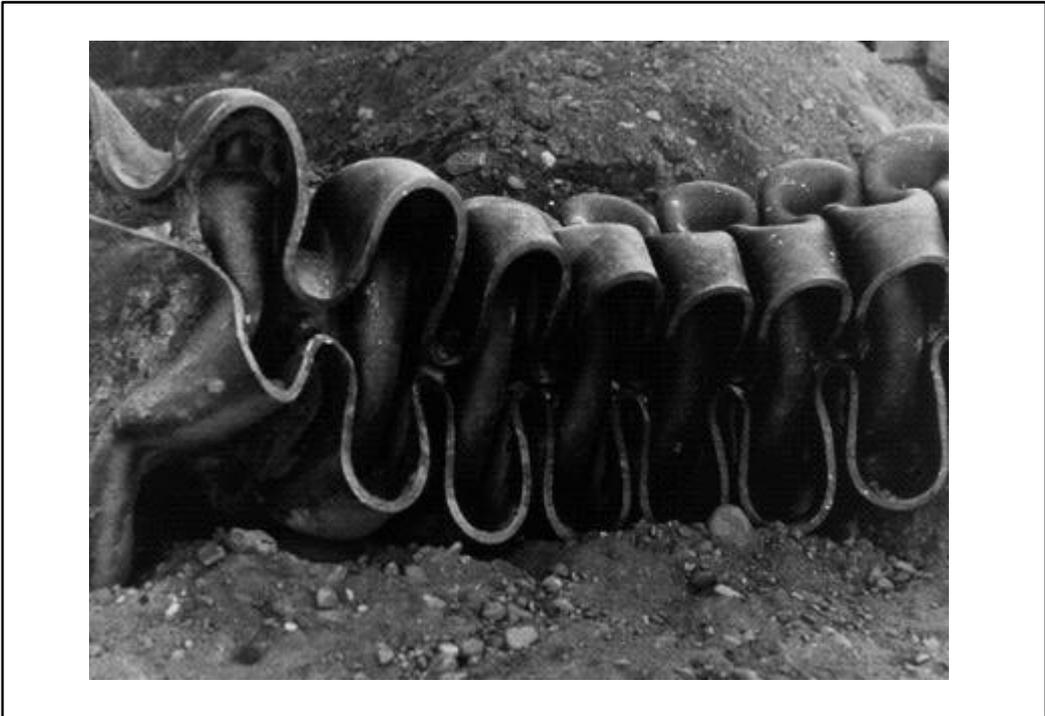
flambement

cloquage



déversement

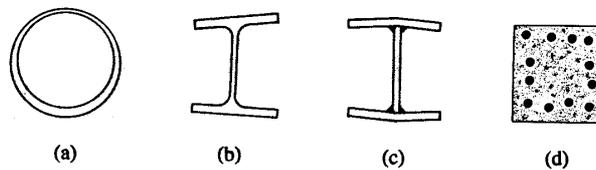
voilement



Flambement des pièces industrielles

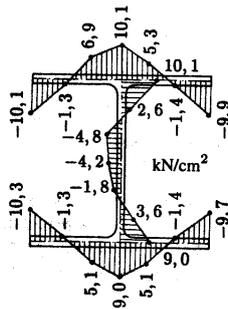
- imperfections = défauts inévitables
 - imperfections géométriques
 - poutres pas rectilignes
 - forces toujours légèrement excentrées
 - dimensions réelles diffèrent des dimensions nominales
 - imperfections matérielles
 - contraintes résiduelles
 - matériau hétérogène

Imperfections géométriques



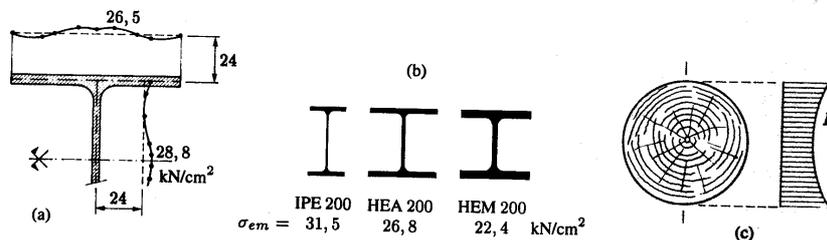
Imperfections géométriques de la section : (a) excentricité des tubes ; (b) tolérances de laminage ; (c) retrait des soudures ; (d) position des armatures du béton armé.

Contraintes résiduelles



Contraintes normales résiduelles après laminage dans un HEA 200
(contraintes à la ligne moyenne, rabattues dans le plan de la section).

Dispersion des caractéristiques



Imperfections des caractéristiques mécaniques : (a) dispersion de la limite d'élasticité sur un profilé HEA 200 (Fe 360); (b) moyenne de la limite d'élasticité dans divers profilés (Fe 360); (c) variation du module de Young longitudinal dans la section d'un tronç.

Importance des imperfections

- rôle décisif des imperfections
 - (...) géométriques → flambement par divergence
 - (...) matérielles → affaiblissement de la résistance
- le flambement a **toujours** lieu par divergence
 - la charge critique d'Euler est néanmoins utilisée dans les méthodes de dimensionnement